Электромагнитная совместимость:

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ

С.П. Куксенко

4 ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

4.1 Операторы в линейных пространствах

При решении задач математической физики, в том числе электростатики, задачу интегрирования дифференциального уравнения часто можно заменить на эквивалентную задачу поиска функции, которая дает минимальное значение некоторого интеграла. Задачи такого типа называются вариационными. Соответственно методы, позволяющие свести проблему интегрирования дифференциального уравнения к эквивалентной вариационной задаче, называются вариационными. Эти методы образуют общую базу для метода моментов и метода конечных элементов, в связи с чем уместно перед изучением последних рассмотреть особенности вариационных методов. Кроме того, решение некоторых дифференциальных и интегральных уравнений относительно легко сформулировать в вариационных терминах. Так, вариационные методы дают точные результаты, не предъявляя чрезмерных требований к вычислительным ресурсам.

Рассмотрим некоторые принципы операторов в линейных пространствах и введем обозначения. Так, скалярное произведение функций u и v определяется выражением

$$\left(u,v\right)=\int_{\Omega} uv^{*}d\Omega, \tag{4.1}$$

где * обозначает комплексное сопряжение, а интегрирование выполняется по области Ω, которая в зависимости от задачи может быть одно-, двух- или трехмерным физическим пространством. В некотором смысле скалярное произведение дает проекцию функции u в направлении v. Если $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ – векторные поля, то формулу (4.1) следует модифицировать:

$$\left(\mathbf{u},\mathbf{v}\right)=\int_{\Omega} \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}^{*}d\Omega. \tag{4.2}$$

Однако для простоты изложения рассмотрим только случай, когда u и v – комплексные скалярные функции. Тогда для каждой такой пары функций, принадлежащей линейному пространству, их скалярное произведение обладает следующими свойствами:

$$(u, v) = (v, u)^*; \tag{4.3}$$

$$(u_1 + \beta u_2, v) = \alpha(u_1, v) + \beta(u_2, v); \tag{4.4}$$

$$(u, v) > 0, \text{ если } u \neq 0; \tag{4.5}$$

$$(u, v) = 0, \text{ если } u = 0. \tag{4.6}$$

Если скалярное произведение u и v равно нулю, то говорят, что u и v ортогональны. Следует отметить, что эти свойства имитируют свойства скалярного произведения для трехмерного пространства. Тогда согласно формулам (4.3) и (4.4) получим

$$(u, \alpha v) = \alpha^*(v, u)^* = \alpha^*(u, v), \tag{4.7}$$

где α – комплексное число.

Уравнение (4.1) также называется невзвешенным или стандартным скалярным произведением. Взвешенное скалярное произведение определяется выражением

$$\left(u, v\right) = \int_{\Omega} u v^* w d\Omega, \tag{4.8}$$

где w – «подходящая» весовая функция.

Норма функции u определяется как

$$\| u \| = \sqrt{\left(u, u\right)}\,.$$

Норма является мерой величины функции. Что касается поля, то нормой является его среднеквадратичное значение.

Далее определим операторное уравнение

$$L\Phi = g, \tag{4.9}$$

где L – произвольный линейный оператор; Φ – неизвестная функция; g – функция источника (воздействия). Пространство, охватываемое всеми функциями, вытекающими из оператора L, дает

$$(L\Phi, g) = (\Phi, L^* g).$$

Говорят, что оператор L самосопряженный, если $L = L^*$, т. е. $(L\Phi, g) = (\Phi, Lg)$; положительный, если $(L\Phi, \Phi) > 0$ для любого $\Phi \neq 0$ в области определения L; отрицательный, если $(L\Phi, \Phi) < 0$ для любого $\Phi \neq 0$ в области определения L.

Свойства решения уравнения (4.9) сильно зависят от свойств оператора L. Так, если L положительно определенный оператор, то легко показать, что решение единственно. Для этого предположим, что Φ и Ψ являются двумя решениями уравнения (4.9), тогда $L\Phi = g$ и $L\Psi = g$. В силу линейности оператора L разность $f = \Phi - \Psi$ также является решением уравнения. Следовательно, $Lf = 0$. Так как L положительно определенный оператор, то $f = 0$, а значит Φ и Ψ равны между собой, что подтверждает единственность решения.

Пример 4.1

Найти скалярное произведение $u(x) = 1 - x$ и $v(x) = 2x$ на интервале (0, 1).

Решение

Так как u и v – это действительные функции, то

$$\left(u,v\right) = \left(v,u\right) = \int_0^1 (1-x)2x\,dx = 0{,}33(3).$$

4.2 Вариационное исчисление

Вариационное исчисление является дисциплиной, которая связана прежде всего с отысканием экстремумов функционалов. Для пояснения этого понятия вспомним определение функции. В математике это соответствие между элементами двух множеств, установленное по такому правилу, что каждому элементу одного множества ставится в соответствие некоторый элемент из другого множества. Для зрительной ассоциации приведем следующий пример. Пусть функция задана таблично, тогда каждому значению x соответствует значение y. Таким образом, числу соответствует число.

Теперь вернемся к определению функционала. Рассмотрим небольшой пример [33]. Пусть на плоскости (t, x) заданы две точки (t_0, x_0) и (T, x_T) (рисунок 4.1). Требуется соединить их гладкой кривой, имеющей наименьшую длину. Для этого выделим небольшой участок dt и соответствующий ему участок dx. Длина кривой на участке dt по теореме Пифагора будет $dl^2 = dx^2 + dt^2$, а общая длина соответственно

$$I\left[x(t)\right] = \int_{t_0}^{T} \sqrt{dx^2 + dt^2} = \int_{t_0}^{T} \sqrt{dt^2\left(\frac{dx^2}{dt^2} + 1\right)} = \int_{t_0}^{T} \sqrt{1 + \left(x'(t)\right)^2}\,dt.$$

Тогда решение задачи сводится к определению такой непрерывной функции $x^*(t)$, которая имеет на отрезке $[t_0, T]$ непрерывную производную и удовлетворяет заданным граничным условиям $x(t_0) = x_0$, $x(T) = x_T$. При этом критерий $I[x(t)]$ имеет минимальное значение.

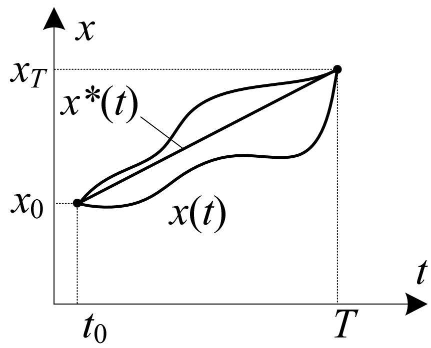

Рисунок 4.1 – К пояснению понятия функционала

Критерий функции $x(t)$ и представляет собой функционал. Очевидно, решением является прямая $x^*(t)$, соединяющая две заданные точки. Таким образом, переменная $I[x(t)]$ называется функционалом, зависящим от функции $x(t)$, если каждой кривой из заданного класса функций соответствует вполне определенное действительное значение I, т. е. функции $x(t)$ соответствует число (функционал – это оператор, множество значений которого состоит из чисел).

Далее будем рассматривать особенности поиска экстремумов интегральных уравнений. В то время как функция производит число в результате представления значений одной или нескольких независимых переменных, функционал в общем виде дает число, которое зависит от всей формы одной или нескольких функций между заданными пределами. В некотором смысле функционал является мерой функции. Простым примером функционала является скалярное произведение. В вариационном исчислении необходимым является требование, чтобы функционал имел стационарное значение. Это требование обычно имеет вид дифференциального уравнения и соответствующих граничных условий.

Рассмотрим задачу нахождения функции $y(x)$ такой, что функция

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y')dx \tag{4.10}$$

при граничных условиях $y(a) = A$ и $y(b) = B$ оказывается стационарной (кривая $I(y)$ проходит через концы кривой y). Подынтегральная функция $F(x, y, y')$ является заданной функцией, зависящей от x, y и $y' = dy/dx$. В уравнении (4.10) $I(y)$ выражает функциональный или вариационный (стационарный) принцип. Задачей здесь является нахождение экстремальной функции $y(x)$, для которой функционал $I(y)$ имеет экстремум. Прежде чем приступить к решению этой задачи, введем оператор δ, называемый вариационным символом.

Вариацией δy функции $y(x)$ является бесконечно малое изменение y при фиксированном значении независимой переменной x, т. е. $\delta x = 0$. Вариация δy функции y обращается в нуль в точках, где функция y задана (граничные условия), и произвольна в других местах (рисунок 4.2).

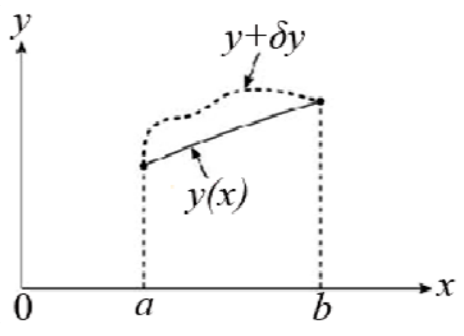

Рисунок 4.2 – Вариация экстремальной функции на заданном диапазоне

Изменения y (т. е. $y \to y + \delta y$) дают соответствующие изменения F. Первая вариация F определяется как

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'. \tag{4.11}$$

Выражение (4.11) является аналогом дифференциала

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y',$$

где $\delta x = 0$, так как x не изменяется, а y изменяется на величину δy. Таким образом, оператор δ подобен дифференциальному оператору. Тогда, если $F_1 = F_1(y)$ и $F_2 = F_2(y)$, получим ряд свойств:

$$\delta(F_1 \pm F_2) = \delta F_1 \pm \delta F_2\,;$$

$$\delta(F_1 F_2) = F_2\delta F_1 + F_1\delta F_2\,;$$

$$\delta\left(\frac{F_1}{F_2}\right) = \frac{F_2\delta F_1 - F_1\delta F_2}{F_2^2};$$

$$\delta\left(F_1\right)^n = n\left(F_1\right)^{n-1}\delta\left(F_1\right)^n;$$

$$\frac{d}{dx}(\delta y) = \delta\left(\frac{dy}{dx}\right);$$

$$\delta\int_a^b y(x)dx = \int_a^b \delta y(x)dx.$$

Чтобы функция $I(y)$ из уравнения (4.10) имела экстремум, ее вариация должна быть равна нулю, т. е.

$$\delta I = 0. \tag{4.12}$$

Для применения условия (4.12) необходимо найти вариацию I согласно уравнению (4.10). Для этого пусть $h(x)$ является приращением функции $y(x)$. Чтобы удовлетворялись граничные условия из уравнения (4.10) для $y(x) + h(x)$, необходимо выполнить условие

$$h(a) = h(b) = 0.$$

Тогда соответствующее приращение I из уравнения (4.10) вычисляется как

$$\Delta I = I(y+h) - I(y) = \int_a^b \left[F(x, y+h, y'+h') - F(x, y, y')\right]dx\,.$$

Применив разложение Тейлора (для первого подынтегрального выражения) и воспользовавшись уравнением (4.11), получим

$$\Delta I = \int_a^b \left[\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y} h + \frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'} h' \right] dx + O\left(h^2\right) = \delta I + O\left(h^2\right).$$

Таким образом, δI представляет собой главную линейную часть приращения ΔI, т. е. дифференциал. Интегрируя по частям[1] второе слагаемое, найдем

$$\delta I = \int_a^b \left[\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'} \right) \right] h dx + \frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'} h \Big|_a^b .$$

Учитывая, что $h(a) = h(b) = 0$, запишем

$$\delta I = \int_a^b \left[\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'} \right) \right] h dx .$$

С учетом условия (4.12) имеем

$$\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'} \right) = 0$$

или

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0. \tag{4.13}$$

Полученное выражение называется уравнением Эйлера. Таким образом, для наличия экстремума у функции $y(x)$ необходимо, чтобы она удовлетворяла уравнению Эйлера.

Сказанное выше непосредственно обобщается на случай функционалов, зависящих от нескольких функций. Так, в рассмотренной задаче имелись одна зависимая и одна независимая переменные – y и x соответственно, т. е. $y = y(x)$. Если есть одна зависимая переменная u и две независимые переменные x и y, т.е. $u = u(x, y)$, то

$$I\left(u\right) = \int_S F(x,y,u,u_x,u_y) dS, \tag{4.14}$$

где $u_x = \partial u/\partial x$, $u_y = \partial u/\partial y$, $dS = dxdy$. Функционал (4.14) стационарен, если $\delta I = 0$, и можно показать, что соответствующее уравнение Эйлера имеет вид [34]

---

[1] $\int u dv = uv - \int v du.$

$$\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)=0. \tag{4.15}$$

В случае двух независимых переменных x и y и двух зависимых переменных $u(x, y)$ и $v(x, y)$ функционал, подлежащий минимизации, имеет вид

$$I(u,v)=\int\limits_S F(x,y,u,v,u_x,u_y,v_x,v_y)dS, \tag{4.16}$$

а соответствующее уравнение Эйлера –

$$\begin{aligned}&\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)=0,\\&\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial v_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial v_y}\right)=0.\end{aligned} \tag{4.17}$$

Еще одним примером функционала, зависящего от производных второго или более высокого порядка, является

$$I(y)=\int\limits_a^b F\left(x,y,y',y'',...,y^{(n)}\right)dx. \tag{4.18}$$

В этом случае уравнение Эйлера имеет вид

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}-\frac{d^3}{dx^3}F_{y'''}+...+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}=0. \tag{4.19}$$

Все приведенные уравнения Эйлера являются дифференциальными уравнениями.

Пример 4.2

Получить уравнение Эйлера для функционала

$$I(\Phi)=\int\limits_S\left[\frac{1}{2}\left(\Phi_x^2+\Phi_y^2\right)-f(x,y)\Phi\right]dxdy.$$

Решение

Поскольку $F(x,y,\Phi,\Phi_x,\Phi_y)=\frac{1}{2}\left(\Phi_x^2+\Phi_y^2\right)-f(x,y)\Phi$, то имеем одну зависимую переменную Φ и две независимые переменные

x и y. Тогда согласно выражению (4.15) уравнение Эйлера примет вид

$$-f(x,y)-\frac{\partial}{\partial x}\Phi_x-\frac{\partial}{\partial y}\Phi_y=0 \text{ или } \Phi_{xx}+\Phi_{yy}=-f(x,y),$$

т. е. это уравнение Пуассона вида $\nabla^2\Phi=-f(x,y)$. Таким образом, решение уравнения Пуассона соответствует нахождению функции Ф, дающей экстремум заданного функционала I(Ф).

4.3 Получение функционала из дифференциального уравнения

Выше показано, что уравнение Эйлера – это дифференциальное уравнение, соответствующее функциональному (вариационному) принципу. Рассмотрим обратную процедуру – получение функционала для данного дифференциального уравнения. В общем случае эту процедуру можно представить в виде последовательности действий:

– перемножить операторное уравнение $L\Phi = g$ (уравнение Эйлера) с вариацией $\delta\Phi$ зависимой переменной Ф и проинтегрировать результат по области определения задачи;

– используя формулу Остроградского – Гаусса или интегрирование по частям, «перенести» производные на вариацию $\delta\Phi$;

– выразить пределы интегрирования в терминах граничных условий;

– вынести вариационный оператор δ за знак интеграла.

Для большей ясности проиллюстрируем эту процедуру с помощью следующего примера. Предположим, что необходимо найти вариационный принцип, связанный с уравнением Пуассона

$$\nabla^2\Phi=-f(x,y),$$

что является задачей, обратной рассмотренной в примере 4.2. После выполнения первого пункта алгоритма получим

$$\delta I=\iint\left(-\nabla^2\Phi-f(x,y)\right)\delta\Phi\,dxdy=$$

$$=-\iint\nabla^2\Phi\,\delta\Phi\,dxdy-\iint f\,\delta\Phi\,dxdy=0.$$

Для выполнения второго этапа воспользуемся интегрированием по частям. Для этого положим $u = \delta\Phi, dv = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)dx$, тогда

$du = \frac{\partial}{\partial x}(\delta\Phi)dx,\quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ и

$$-\int\left[\int \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)\delta\Phi\, dx\right]dy = -\int\left[\delta\Phi\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \int \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\delta\Phi\, dx\right]dy.$$

После интегрирования получим

$$\delta I = \iint\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\delta\Phi + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\delta\Phi - \delta f\,\Phi\right)dxdy - \int\delta\Phi\frac{\partial \Phi}{\partial x}dy - \int\delta\Phi\frac{\partial \Phi}{\partial y}dx =$$

$$= \frac{\delta}{2}\iint\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 - 2f\Phi\right]dxdy - \delta\int\Phi\frac{\partial \Phi}{\partial x}dy - \delta\int\Phi\frac{\partial \Phi}{\partial y}dx.$$

Последние два слагаемых обнуляются, если на границах заданы однородные условия Дирихле или Неймана. Тогда

$$\delta I = \delta\iint\frac{1}{2}\left(\Phi_x^2 + \Phi_y^2 - 2\Phi f\right)dxdy,$$

и

$$I(\Phi) = \frac{1}{2}\iint\left(\Phi_x^2 + \Phi_y^2 - 2\Phi f\right)dxdy, \qquad (4.20)$$

как и ожидалось.

Рассмотренная процедура нахождения функции $I(\Phi)$ соответствующего операторного уравнения (4.9) имеет альтернативу. Так, если оператор L – вещественный, положительно определенный и самосопряженный, то задача решения уравнения (4.9) эквивалентна задаче минимизации функционала [35]

$$I(\Phi) = (L\Phi, \Phi) - 2(\Phi, g). \qquad (4.21)$$

Таким образом, уравнение (4.20) может быть решено с помощью уравнения (4.21). Данный подход используется и для решения интегральных уравнений.

Пример 4.3

Найти функционал для дифференциального уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y+x=0,\ 0<x<1$$

при условии, что $y(0)=y(1)=0$.

Решение

Поскольку $\delta I=0$, тогда

$$\delta I=\int_0^1\left(\frac{d^2y}{dx^2}+y+x\right)\delta y\,dx=\int_0^1\frac{d^2y}{dx^2}\delta y\,dx+\int_0^1 y\,\delta y\,dx+\int_0^1 x\,\delta y\,dx=0.$$

Интегрирование по частям дает

$$\delta I=\delta y\frac{dy}{dx}\Bigg|_{x=0}^{x=1}-\int_0^1\frac{dy}{dx}\frac{d}{dx}\delta y+\int_0^1\frac{1}{2}\delta\left(y^2\right)dx+\delta\int_0^1 x\,y\,dx.$$

Поскольку величина y фиксирована в точках $x=0$ и $x=1$, то $\delta y(0)=\delta y(1)=0$. Тогда

$$\delta I=-\delta\int_0^1\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2dx+\frac{1}{2}\delta\int_0^1 y^2\,dx+\delta\int_0^1 x\,y\,dx=\frac{\delta}{2}\int_0^1\left(-y'^2+y^2+2xy\right)dx.$$

В результате получим

$$I(y)=\frac{1}{2}\int_0^1\left(-y'^2+y^2+2xy\right)dx.$$

4.4 Метод Рэлея – Ритца

Метод Рэлея – Ритца является вариационным методом минимизации заданного функционала, дающим решение вариационной задачи без обращения к связанному с ней дифференциальному уравнению. Другими словами, это прямое применение вариационных принципов, обсуждавшихся выше. Метод был впервые предложен Рэлеем в 1877 г. и развит Ритцем в 1909 г. Для упрощения изложения (без потери общности рассуждений) рассмотрим функционал

$$I(\Phi) = \int_S F\left(x, y, \Phi, \Phi_x, \Phi_y\right) dS. \qquad (4.22)$$

Требуется минимизировать этот интеграл. При использовании метода Рэлея – Ритца составляется линейно независимый набор базисных функций φ_n (координатных элементов [35]) и строится приближенное решение уравнения (4.20), удовлетворяющее некоторым заданным граничным условиям, т. е. решение ищется в виде конечной линейной комбинации этих функций

$$\widehat{\Phi} \approx \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n + \varphi_0, \qquad (4.23)$$

где φ_0 удовлетворяет неоднородным граничным условиям; φ_n – однородным граничным условиям[1]; a_n – некоторые константы (коэффициенты разложения), определяемые из условия наилучшего приближения функции $\widehat{\Phi}$ к точному решению – функции Ф. Подставив (4.23) в (4.22), конвертируем интеграл I(Ф) в функцию, зависящую от N коэффициентов:

$$I(\Phi) = I(a_1, a_2, ..., a_N).$$

Минимум этой функции достигается, когда ее частные производные по каждому коэффициенту равны нулю, т. е.

$$\frac{\partial I}{\partial a_n} = 0, \quad n = 1, 2, ..., N. \qquad (4.24)$$

Таким образом формируется набор из N независимых уравнений и полученная СЛАУ решается для нахождения коэффициентов a_n, которые затем подставляются в выражение (4.23). Если решение $\widehat{\Phi} \to \Phi$ при $N \to \infty$, то говорят, что процесс сходится к точному решению.

Рассмотрим одну из альтернативных процедур вычисления коэффициентов a_n [35]. Подставим уравнение (4.23) (игнорируя φ_0, так как оно может быть учтено в правой части СЛАУ)

[1] Условие (начальное или граничное) называется однородным, если сумма любых двух функций u_1 и u_2, удовлетворяющих условию (начальному или граничному), также удовлетворяет этому условию.

в уравнение (4.21). Это преобразует $I(\Phi)$ в функцию из N независимых переменных $a_1, a_2, \ldots, a_N$. В результате получим

$$I = \left(\sum_{m=1}^{N} a_m L\varphi_m, \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n \right) - 2\left(\sum_{m=1}^{N} a_m \varphi_m, g \right) =$$
$$= \sum_{m=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} \left(L\varphi_m, \varphi_n \right) a_n a_m - 2\sum_{m=1}^{N} \left(\varphi_m, g \right) a_m.$$

Так как нас интересует выбор a_m, минимизирующий интеграл I, то полученное уравнение должно удовлетворять условию (4.24). Продифференцировав его по a_m и приравняв результат к нулю, получим систему уравнений

$$\sum_{n=1}^{N} (L\varphi_m, \varphi_n) a_n = (g, \varphi_m), m = 1, 2, ..., N, \tag{4.25}$$

или

$$\begin{pmatrix} (L\varphi_1,\varphi_1) & (L\varphi_1,\varphi_2) & \ldots & (L\varphi_1,\varphi_N) \\ (L\varphi_2,\varphi_1) & (L\varphi_2,\varphi_2) & \ldots & (L\varphi_2,\varphi_N) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (L\varphi_N,\varphi_1) & (L\varphi_N,\varphi_2) & \ldots & (L\varphi_N,\varphi_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (g,\varphi_1) \\ (g,\varphi_2) \\ \ldots \\ (g,\varphi_N) \end{pmatrix}. \tag{4.26}$$

Решив СЛАУ (4.25) и подставив вектор решения, состоящий из коэффициентов $a_1, a_2, \ldots, a_N$, в уравнение (4.23), найдем требуемое решение $\widehat{\Phi}$. Систему уравнений (4.26) иногда называют системой Рэлея – Ритца.

Таким образом, базисные функции выбираются из условия согласования с граничными условиями. Метод Рэлея – Ритца имеет два ограничения. Первое заключается в том, что вариационная формулировка согласно уравнению (4.22) может не существовать при решении некоторых задач. Второе состоит в том, что сложно, а иногда и невозможно найти функцию φ_0, соответствующую граничным условиям для областей со сложной геометрией. Далее на примерах подробнее рассмотрим особенности выбора базисных функций.

Пример 4.4

Используя метод Рэлея – Ритца, решить обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\Phi'' + 4\Phi - x^2 = 0,\ 0 < x < 1,$$

удовлетворяющее граничным условиям $\Phi(0) = \Phi(1) = 0$.

Решение

Точное решение данного уравнения известно как

$$\Phi(x) = \frac{\sin 2(1-x) - \sin 2x}{8\sin 2} + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{8}.$$

Для исходного уравнения имеем

$$I(\Phi) = \int_0^1 \left[\left(\Phi'\right)^2 - 4\Phi^2 + 2x^2\Phi \right] dx.$$

Будем искать приближенное решение в виде

$$\widehat{\Phi} = \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n + \varphi_0$$

при $\varphi_0 = 0$ и $\varphi_n = x^n(1-x)$, удовлетворяющих заданным граничным условиям. Следует отметить, что выбор таких базисных функций не единственен. Могут быть выбраны, например, $\varphi_n = x\left(1 - x^n\right)$ или $\varphi_n = \sin n\pi x$, которые также удовлетворяют заданным граничным условиям. Для нахождения коэффициентов разложения a_n можно воспользоваться двумя способами: применить функционал напрямую согласно уравнению (4.24); решить систему (4.26). Сначала используем первый способ.

При $N = 1$ получим $\widehat{\Phi} = a_1\varphi_1 = a_1 x(1-x)$. Подстановка в интеграл $I(\Phi)$ дает

$$I(a_1) = \int_0^1 \left[a_1^2(1-2x)^2 - 4a_1^2\left(x - x^2\right)^2 + 2a_1 x^3(1-x) \right] dx = a_1^2/5 + a_1/10.$$

Функционал $I(a_1)$ минимален, когда $\dfrac{\partial I}{\partial a_1} = 0$, что достигается при $a_1 = 0$ или $a_1 = -0{,}25$. Таким образом, находим приближенное решение

$$\widehat{\Phi} = -\frac{1}{4}x(1-x).$$

При $N = 2$ получим $\widehat{\Phi} = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 = a_1 x(1-x) + a_2 x^2(1-x)$ и

$$I(a_1,a_2) = \int\limits_0^1 \left\{ \left[a_1(1–2x) + a_2\left(2x–3x^2\right) \right]^2 – 4\left[a_1\left(x–x^2\right) + a_2\left(x^2–x^3\right) \right]^2 + \right.$$

$$\left. + 2a_1 x^2\left(x - x^2\right) + 2a_1 x^2\left(x^2 - x^3\right) \right\} dx =$$

$$= a_1^2/5 + 2a_2^2/21 + a_1 a_2 + a_1/10 + a_2/15.$$

При $\dfrac{\partial I}{\partial a_1} = 0$ имеем $4a_1 + 2a_2 = –1$, а при $\dfrac{\partial I}{\partial a_2} = 0$ имеем $21a_1 + 20a_2 = – 7$. Решив систему из этих двух уравнений с двумя неизвестными, найдем $a_1 = –6/38$, $a_2 = –7/38$. Таким образом, приближенное решение в данном случае имеет вид

$$\widehat{\Phi} = \frac{x}{38}(7x^2 - x - 6).$$

Рассмотрим второй способ решения. Сформируем систему вида (4.26). В данном случае

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + 4,\ g = x^2.$$

Тогда

$$s_{mn} = (L\varphi_m, \varphi_n) = (\varphi_m, L\varphi_n) =$$

$$= \frac{n(n-1)}{m+n-1} - \frac{2n^2}{m+n} + \frac{n(n+1)+4}{m+n+1} - \frac{8}{m+n+2} + \frac{4}{m+n+3},$$

$$b_n = (g, \varphi_n) = \int\limits_0^1 x2n^n(1-x)dx = \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}.$$

При $N = 1$ получим $s_{11} = -1/5,\ b_1 = 1/20$, тогда, как и ранее, $a_1 = –0{,}25$. При $N = 2$ получим $s_{11} = –1/5$, $s_{21} = s_{12} = –1/10$, $s_{22} = –2/21$, $b_1 = 1/20$, $b_2 = 1/30$. В результате, сформировав СЛАУ

$$\begin{pmatrix} -1/5 & -1/10 \\ -1/10 & -2/21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/20 \\ 1/30 \end{pmatrix}$$

и решив ее, находим $a_1 = –6/38$, $a_2 = –7/38$.

В таблице 4.1 приведено сравнение точного решения с решением, полученным методом Рэлея – Ритца.

Таблица 4.1 – Решение дифференциального уравнения методом Рэлея – Ритца

x	Точное решение	Метод Рэлея – Ритца	
		$N = 1$	$N = 2$
0.0	0.0	0.0	0.0
0.2	–0.0301	–0.0400	–0.0312
0.4	–0.0555	–0.0600	–0.0556
0.6	–0.0625	–0.0625	–0.0644
0.8	–0.0489	–0.0400	–0.0488
1.0	0.0	0.0	0.0

Пример 4.5

Используя метод Релея – Ритца, решить уравнение Пуассона

$$\nabla^2\Phi = -\rho_0,\ \rho_0 = \text{const},$$

при $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$ и $\Phi(x, \pm 1) = \Phi(y, \pm 1) = 0$.

Решение

За счет симметрии задачи используем базисные функции вида

$$\varphi_{mn} = \left(1 - x^2\right)\left(1 - y^2\right)\left(x^{2m}y^{2n} + x^{2n}y^{2m}\right),\ \ m, n = 0, 1, 2, \ldots$$

Тогда

$$\widehat{\Phi} = \left(1 - x^2\right)\left(1 - y^2\right)\left(a_1 + a_2\left(x^2 + y^2\right) + a_3x^2y^2 + a_4\left(x^4 + y^4\right) + \ldots\right).$$

При $m = n = 0$ получим первое приближение ($N = 1$) в виде

$$\widehat{\Phi} = a_1\varphi_1,$$

где $\varphi_1 = \left(1 - x^2\right)\left(1 - y^2\right)$. Тогда

$$s_{11} = \left(L\varphi_1, \varphi_1\right) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2}\right)\varphi_1 dxdy =$$

$$= -8\int_0^1\int_0^1\left(2 - x^2 - y^2\right)\left(1 - x^2\right)\left(1 - y^2\right)dxdy = -256/45,$$

$$b_1 = (g, \varphi_1) = -\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(2 - x^2 - y^2\right)\left(1 - x^2\right)\left(1 - y^2\right)dxdy =$$

$$= -8\int_0^1\int_0^1\left(1 - x^2\right)\left(1 - y^2\right)\rho_0 dxdy = -\frac{16}{9}\rho_0.$$

В результате имеем

$$-256a_1/45 = -16\rho_0/9 \;\rightarrow\; a_1 = 5\rho_0/16$$

и

$$\widehat{\Phi} = \frac{5}{16}\rho_0\left(1 - x^2\right)\left(1 - y^2\right).$$

При $m = n = 1$ получим первое приближение ($N = 2$) в виде

$$\widehat{\Phi} = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2,$$

где $\varphi_1 = \left(1 - x^2\right)\left(1 - y^2\right)$ и $\varphi_2 = \left(1 - x^2\right)\left(1 - y^2\right)\left(x^2 + y^2\right)$. Значения s_{11} и b_1 такие же, как при $N = 1$. При этом

$$s_{21} = s_{12} = (L\varphi_1, \varphi_2) = -1024/525,$$

$$s_{22} = (L\varphi_2, \varphi_2) = -1124/4725,$$

$$b_2 = (g, \varphi_2) = -32\rho_0/45.$$

В результате имеем СЛАУ

$$\begin{pmatrix} -252/45 & -1024/525 \\ -1024/525 & -11264/4725 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16\rho_0/9 \\ -32\rho_0/45 \end{pmatrix},$$

решение которой дает $a_1 = 0{,}2922\rho_0$, $a_2 = 0{,}0592\rho_0$. Тогда

$$\widehat{\Phi} = \left(1 - x^2\right)\left(1 - y^2\right)\left(0{,}2922 + 0{,}0592\left(x^2 + y^2\right)\right)\rho_0.$$

Пример 4.6

Вычислить емкость экранированной МПЛ (рисунок 4.3).

Если положить, что в данной структуре распространяется только поперечная электромагнитная волна (квазистатическое приближение), то для решения поставленной задачи требуется решить уравнение Лапласа вида

$$\nabla^2\Phi = 0.$$

Будем использовать полную геометрическую симметрию структуры и полярную систему координат (см. рисунок 4.3, *б*).

При этом добавится граничное условие $\partial\Phi/\partial x = 0$ при $x = -w$. Допустим сингулярность на краю полоски.

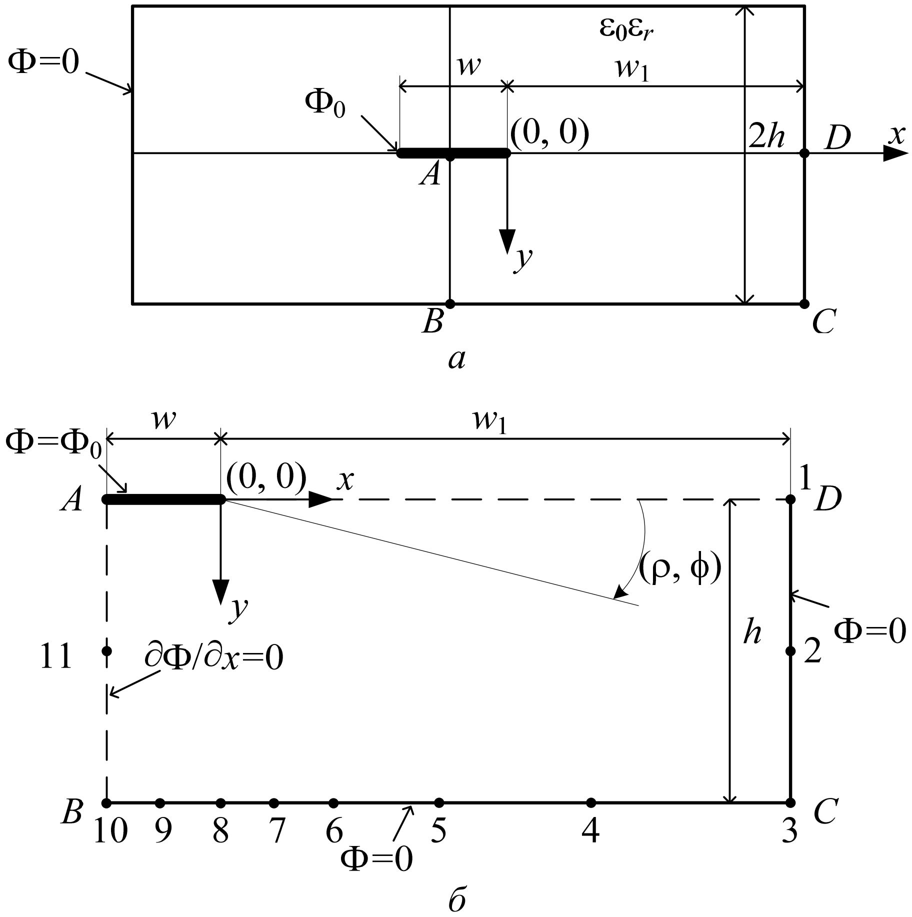

Рисунок 4.3 – Поперечное сечение экранированной МПЛ (*а*) и ее четверть (*б*)

Тогда вариацию потенциала в окрестности этой сингулярности аппроксимируем с помощью тригонометрических базисных функций:

$$\widehat{\Phi} = \Phi_0 + \sum_{k=1,\,3,\,5}^{\infty} c_k \rho^{k/2} \cos\frac{k\varphi}{2}, \tag{4.27}$$

где Φ_0 – потенциал полоски. Коэффициенты c_k требуется вычислить.

Если ограничить бесконечный ряд в данном уравнении до N слагаемых, это будет эквивалентно требованию его выполнения в M ($\geq N$) точках на границе. Применив аппроксимацию для каждой из M граничных точек, получим СЛАУ из M уравнений

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{M1} & a_{M2} & \dots & a_{MN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \dots \\ \Phi_M \end{pmatrix} \text{ или } \mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

Вектор решения **x** нельзя однозначно определить из данной переопределенной СЛАУ (при $M > N$). Поэтому определим невязку

$$\mathbf{r} = \mathbf{Ax} - \mathbf{b}$$

и воспользуемся методом наименьших квадратов. Далее будем искать **x**, минимизирующий квадрат невязки $\mathbf{r}^2$. Для этого рассмотрим

$$\mathbf{r}^2 = \mathbf{r}^t\mathbf{r} = (\mathbf{Ax} - \mathbf{b})^t(\mathbf{Ax} - \mathbf{b}).$$

Тогда

$$\frac{\partial \mathbf{r}^2}{\partial \mathbf{x}} = 0 \;\rightarrow\; \mathbf{A}^t\mathbf{Ax} - \mathbf{A}^t\mathbf{b} = 0$$

или

$$\mathbf{x} = \left(\mathbf{A}^t\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^t\mathbf{b},$$

где индекс t обозначает операцию транспонирования соответствующей матрицы. Таким образом, вместо переопределенной СЛАУ требуется решение СЛАУ из N уравнений с N неизвестными. Решив ее, получим аппроксимирующее решение $\widehat{\Phi}$. После этого можно приступить к вычислению погонной емкости линии при заданном отношении ширины к высоте структуры. Емкость линии вычисляется с помощью выражения $C = Q/\Phi_0 = Q$, $\Phi_0 = 1$. Для вычисления заряда Q разобьем границу BCD (см. рисунок 4.3, *б*) на сегменты, тогда

$$Q = \int \sigma_L dl = 4\sum_{BCD} \sigma_L \Delta l = 4\left(\sum_{BC} \sigma_L \Delta l + \sum_{CD} \sigma_L \Delta l\right), \qquad (4.28)$$

где поверхностная плотность заряда $\sigma_L = \mathbf{D}\cdot\mathbf{a}_n = \varepsilon_0\varepsilon_r\mathbf{E}\cdot\mathbf{a}_n$, $\mathbf{E} = -\nabla V$, а коэффициент 4 введен из-за использования полной геометрической симметрии. В полярных координатах имеем

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\mathbf{a}_\varphi,$$

$$\mathbf{E} = -\sum_{k\text{-нечет}} \frac{k}{2} c_k \rho^{k/2-1}\left(\cos\frac{k\varphi}{2}\mathbf{a}_\rho - \sin\frac{k\varphi}{2}\mathbf{a}_\varphi\right).$$

Поскольку $\mathbf{a}_x = \cos\varphi\mathbf{a}_\rho - \sin\varphi\mathbf{a}_\varphi$ и $\mathbf{a}_y = \sin\varphi\mathbf{a}_\rho + \cos\varphi\mathbf{a}_\varphi$, то

$$\sigma_L\,|_{BC} = \varepsilon\mathbf{E}\cdot\mathbf{a}_y = -\varepsilon\sum_{k\text{-нечет}} \frac{k}{2} c_k \rho^{k/2-1}\left(\cos\frac{k\varphi}{2}\sin\varphi - \sin\frac{k\varphi}{2}\cos\varphi\right),$$

$$\sigma_L\,|_{CD} = \varepsilon\mathbf{E}\cdot\mathbf{a}_x = -\varepsilon\sum_{k\text{-нечет}} \frac{k}{2} c_k \rho^{k/2-1}\left(\cos\frac{k\varphi}{2}\cos\varphi + \sin\frac{k\varphi}{2}\sin\varphi\right).$$

Теперь при известных параметрах структуры достаточно легко можно найти значение заряда и соответственно емкость линии.

Контрольные вопросы и задания

1. Поясните, что такое функционал и вариация функции.
2. Для решения каких уравнений применяют метод Рэлея – Ритца?
3. Опишите процедуру получения функционала для заданного дифференциального уравнения.
4. Назовите обязательное условие наличия экстремума функции.
5. Решить задачу из примера 4.4 при $N = 3$.
6. Разработать программу на языке Octave для решения задачи из примера 4.6.