

УДК 519.64:621.396.67

Д.В. Клюкин, Д.М. Мочалов, С.П. Куксенко

## О способах вычисления поверхностных сингулярных интегралов при решении антенных задач методом моментов

Выполнено сравнение эффективности способов вычисления сингулярных интегралов при формировании системы линейных алгебраических уравнений в ходе решения антенных задач методом моментов. На примере биконической антенны с использованием стороннего программного обеспечения выполнена оценка точности моделирования с использованием различных способов вычисления сингулярных интегралов. С использованием опубликованных экспериментальных данных входного импеданса биконической антенны и антенны типа «бабочка» выполнена валидация этих способов. Оценена вычислительная сложность рассмотренных способов. Представлены рекомендации по выбору наиболее оптимального способа вычисления сингулярных интегралов при решении антенных задач.

**Ключевые слова:** антенны, численные методы, метод моментов, поверхностные сингулярные уравнения, квадратные формулы, преобразование Даффи, аналитические выражения, вычислительная сложность.

**DOI:** 10.21293/1818-0442-2024-27-1-23-34

Значимость компьютерного моделирования при разработке новых антенных элементов и систем постоянно возрастает. Его применение при проектировании антенн позволяет предсказать их характеристики и сравнить различные варианты конструкторских решений. В результате этого уменьшается необходимость в проведении большого числа физических экспериментов, что способствует повышению качества и ускорению процесса разработки, а также снижению его стоимости. Поэтому в настоящее время широко применяются системы автоматизированного проектирования (САПР), основанные на численных методах электродинамики [1, 2]. При этом широко распространено использование метода моментов (МоМ) [3, 4]. Его привлекательность обусловлена вычислительной простотой: этот метод требует дискретизации только поверхности антенны в отличие от дискретизации пространства при использовании методов конечных разностей во временной области и конечных элементов.

Применительно к трехмерным электродинамическим задачам в качестве операторного уравнения при использовании МоМ часто используется интегральное уравнение электрического поля [3]. Однако наличие функции Грина в этом уравнении приводит к необходимости вычисления сингулярных интегралов, когда тестовые и базисные функции имеют «перекрывающиеся» элементы. Для устранения этих особенностей разработаны различные способы, основанные на численном, аналитическом или численно-аналитическом вычислении сингулярных интегралов [5]. Данные способы различаются как по вычислительным затратам, так и по точности моделирования, поэтому целесообразно выполнить их сравнение для выявления наиболее оптимального и эффективного из них.

Цель работы – реализовать и сравнить способы вычисления поверхностных сингулярных интегралов при формировании системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом моментов на примере решения антенных задач.

### Метод моментов

Метод моментов является универсальным численным методом сведения дифференциальных и интегральных (интегродифференциальных) уравнений к СЛАУ [2]. Так, при расчёте неизвестная величина (плотность тока), зависящая от пространственных координат, аппроксимируется рядом известных базисных функций, умноженных на неизвестные коэффициенты. Это приближение подставляется в линейное операторное уравнение. Затем левую и правую части уравнения умножают на подходящую тестовую функцию и интегрируют по области ее определения. Тогда линейное операторное уравнение сводится к линейному алгебраическому уравнению. Повторяя эту процедуру для набора независимых тестовых функций, число которых совпадает с числом базисных функций, формируется СЛАУ. Ее решение дает неизвестные коэффициенты и позволяет найти приближенное решение операторного уравнения. Далее из решения СЛАУ вычисляются требуемые характеристики анализируемого объекта, например диаграмма направленности и входной импеданс антенны.

При анализе антенн использование МоМ предусматривает следующие этапы решения. Сначала металлические части заданной структуры заменяются эквивалентными поверхностными электрическими токами, после чего решается задача возбуждения электромагнитного поля этими токами. На полученное решение для проводящих элементов накладываются соответствующие граничные условия, которые в дальнейшем используются для вычисления эквивалентных токов.

Для аппроксимации криволинейных границ поверхностей произвольной формы принято использовать разбиение на треугольники, а для представления плотности тока в них – векторные базисные функции RWG. Каждая базисная функция RWG ассоциируется с общим внутренним ребром длиной  $l$  двух треугольников  $T^+$  и  $T^-$  и равна нулю за их пределами (рис. 1) [6]. Положение точки на поверхно-

сти треугольника определяется через радиус-вектор  $\mathbf{r}$  относительно начала координат (точка  $O$ ) или радиус-вектор  $\boldsymbol{\rho}$  относительно вершины, противоположащей общему ребру. При этом принято, что вектор  $\boldsymbol{\rho}^+$  направлен от свободной вершины треугольника  $T^+$ , а  $\boldsymbol{\rho}^-$  – к свободной вершине  $T^-$ . Это же относится к радиус-векторам  $\mathbf{r}^{c\pm}$  и  $\boldsymbol{\rho}^{c\pm}$ , определяющим положение центров треугольников относительно начала координат и свободных вершин треугольников соответственно.

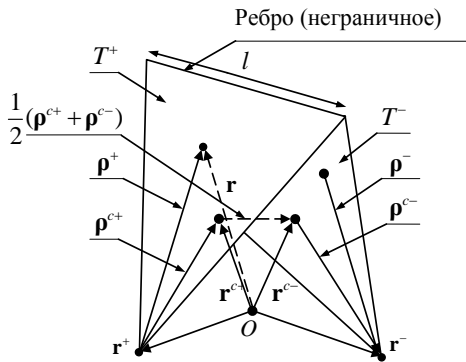


Рис. 1. Определение функции RWG на двух треугольниках с общим ребром  $l$  [6]

Плотность тока на всей поверхности исследуемой структуры, состоящей из  $N$  внутренних ребер поверхностной сетки, может быть представлена в виде суперпозиции базисных функций [6]:

$$\mathbf{J} = \sum_{n=1}^N I_n \mathbf{f}_n(\mathbf{r}), \quad (1)$$

где  $\mathbf{f}_n$  – базисная функция RWG, связанная с общим ребром  $n$  двух смежных треугольников  $T_n^+$  и  $T_n^-$ , определяемая как [6]

$$\mathbf{f}_n(\mathbf{r}) = \begin{cases} (l_n/2A_n^+) \boldsymbol{\rho}_n^+(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in T_n^+; \\ (l_n/2A_n^-) \boldsymbol{\rho}_n^-(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in T_n^-; \\ 0, & \mathbf{r} \notin T_n^\pm, \end{cases} \quad (2)$$

где  $A_n^+$  и  $A_n^-$  – площади треугольников  $T_n^+$  и  $T_n^-$  соответственно. При этом

$$\boldsymbol{\rho}_n^+(\mathbf{r}) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_n^+, \mathbf{r} \in T_n^+, \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\rho}_n^-(\mathbf{r}) = \mathbf{r}_n^- - \mathbf{r}, \mathbf{r} \in T_n^-. \quad (4)$$

Плотность заряда постоянна в каждом треугольнике, а полный заряд, связанный с парой треугольников  $T_n^+$  и  $T_n^-$ , равен нулю. При этом пара смежных треугольников соответствует малому электрическому диполю длиной  $d_n = |\mathbf{r}_n^- - \mathbf{r}_n^+|$ , в котором протекает ток  $I_n$ .

Для антенной задачи в качестве операторного уравнения выступает интегральное уравнение электрического поля, определяемое как

$$\mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) = j\omega \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla \Phi(\mathbf{r}), \quad (5)$$

где  $\mathbf{E}^{\text{inc}}$  – воздействующее поле,  $\mathbf{r}$  – точка наблюдения, а  $\mathbf{A}$  и  $\Phi$  – скалярный и векторный потенциалы соответственно, вычисляемые с помощью функции Грина, которая содержит информацию о среде, в которой определены потенциалы как [7]

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu \int_{S'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') dS', \quad (6)$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{j\omega \epsilon} \int_{S'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') dS', \quad (7)$$

где  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  – функция Грина свободного пространства (однородная изотропная среда), выражаемая как

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\exp(-jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (8)$$

Тестирование операторного уравнения выполняется также с использованием RWG-функций как

$$(\mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{f}_m) = j\omega (\mathbf{A}, \mathbf{f}_m) + (\nabla \Phi, \mathbf{f}_m), m=1, 2, \dots, N. \quad (9)$$

Второе слагаемое из (6), используя свойства функции RWG на ребрах поверхности  $S$  (не имеет компоненты, нормальной к границе этой поверхности), представляется как [6]

$$(\nabla \Phi, \mathbf{f}_m) = \int_S \nabla \Phi \cdot \mathbf{f}_m dS = -\int_S \Phi \nabla \cdot \mathbf{f}_m dS. \quad (10)$$

Аппроксимируя токи и потенциалы в треугольниках их средними значениями в центрах треугольников (одноточечное интегрирование), выражение (7), используя определение дивергенции функций RWG, упрощается как [6]

$$-\int_S \Phi \nabla \cdot \mathbf{f}_m dS = -\left( \frac{l_m}{A_m^+} \int_{T_m^+} \Phi dS - \frac{l_m}{A_m^-} \int_{T_m^-} \Phi dS \right) \approx \approx l_m \left( \Phi(\mathbf{r}_m^{c-}) - \Phi(\mathbf{r}_m^{c+}) \right). \quad (11)$$

Для аппроксимации воздействующего поля  $\mathbf{E}^{\text{inc}}$  и векторного потенциала  $\mathbf{A}$  из (5), используя (2), выражение (6) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} l_m \left( \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r}_m^{c+}) \cdot \boldsymbol{\rho}_m^{c+} / 2 + \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r}_m^{c-}) \cdot \boldsymbol{\rho}_m^{c-} / 2 \right) = \\ = l_m \left( \mathbf{A}(\mathbf{r}_m^{c+}) \cdot \boldsymbol{\rho}_m^{c+} / 2 + \mathbf{A}(\mathbf{r}_m^{c-}) \cdot \boldsymbol{\rho}_m^{c-} / 2 \right) + \\ + l_m \left( \Phi(\mathbf{r}_m^{c-}) - \Phi(\mathbf{r}_m^{c+}) \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Тогда, подставив (5), (6) и (2) в (12), формируется СЛАУ вида

$$\mathbf{Z}\mathbf{i} = \mathbf{v}, \quad (13)$$

где элементы матрицы  $\mathbf{Z}$  и правой части вычисляются как [3]

$$z_{nm} = z_{T_m^+ T_n^+} + z_{T_m^+ T_n^-} + z_{T_m^- T_n^+} + z_{T_m^- T_n^-}, \quad (14)$$

$$v_m = l_m \left[ \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r}_m^{c+}) \cdot \boldsymbol{\rho}_m^{c+} / 2 + \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r}_m^{c-}) \cdot \boldsymbol{\rho}_m^{c-} \right], \quad (15)$$

где

$$z_{T_m^+ T_n^+} = \frac{l_m l_n}{A_m^+ A_n^+} \iint \iint \left[ \frac{j\omega \mu}{4} \boldsymbol{\rho}_m^+(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\rho}_n^+(\mathbf{r}') - \frac{j}{\omega \epsilon} \right] \times$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{\exp(-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dS'dS, \quad (16) \\ z_{T_m^+ T_n^-} &= \frac{l_m l_n}{A_m^+ A_n^-} \iint \iint_{T_m^+ T_n^-} \left[ \frac{j\omega\mu}{4} \boldsymbol{\rho}_m^+(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\rho}_n^-(\mathbf{r}') + \frac{j}{\omega\epsilon} \right] \times \\ & \times \frac{\exp(-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dS'dS, \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{T_m^- T_n^+} &= \frac{l_m l_n}{A_m^- A_n^+} \iint \iint_{T_m^- T_n^+} \left[ \frac{j\omega\mu}{4} \boldsymbol{\rho}_m^-(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\rho}_n^+(\mathbf{r}') + \frac{j}{\omega\epsilon} \right] \times \\ & \times \frac{\exp(-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dS'dS, \quad (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{T_m^- T_n^-} &= \frac{l_m l_n}{A_m^- A_n^-} \iint \iint_{T_m^- T_n^-} \left[ \frac{j\omega\mu}{4} \boldsymbol{\rho}_m^-(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\rho}_n^-(\mathbf{r}') - \frac{j}{\omega\epsilon} \right] \times \\ & \times \frac{\exp(-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dS'dS. \quad (19) \end{aligned}$$

Путем решения результирующей СЛАУ (13) определяются искомые коэффициенты разложения плотности поверхностного тока по базисным функциям. Найденные коэффициенты используются для расчета параметров и характеристик антенны, таких как входной импеданс, излучаемая мощность, диаграмма направленности, коэффициент усиления и др. [2, 8, 9].

### Способы вычисления сингулярных интегралов

Формирование матрицы  $\mathbf{Z}$  представляет собой сложную задачу из-за необходимости вычисления восьми сингулярных интегралов (16)–(19). Так, если интегралы по треугольникам функций RWG  $m$  и  $n$  аппроксимируются только с помощью центров этих треугольников, возникает сингулярность в случаях, когда  $m = n$  («перекрывающиеся» функции, рис. 2, а) или когда функции RWG имеют общий треугольник (частично «перекрывающиеся» функции, рис. 2, б), так как расстояние  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  между ними становится равным нулю. Для «перекрывающихся» функций два слагаемых выражения (14) содержат сингулярность ( $Z_{T_m^+ T_n^+}$  и  $Z_{T_m^- T_n^-}$  для случая из рис. 2, а), а для частично «перекрывающихся» – одно ( $Z_{T_m^+ T_n^-}$  для случая из рис. 2, б).

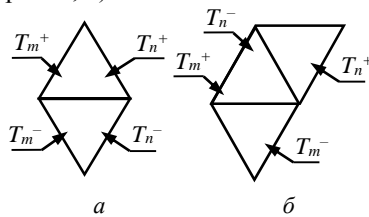


Рис. 2. «Перекрывающиеся» (а)

и частично «перекрывающиеся» (б) функции RWG  $m$  и  $n$

В общем виде сингулярные интегралы из (16) – (19) представляются как (верхние индексы у векторов  $\boldsymbol{\rho}_m, \boldsymbol{\rho}_n$  и треугольников  $T_m, T_n$  опущены)

$$\frac{1}{A_m A_n} \int_{T_m} \boldsymbol{\rho}_m(\mathbf{r}) \cdot \int_{T_n} \boldsymbol{\rho}_n(\mathbf{r}') \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dS'dS, \quad (20)$$

$$\frac{1}{A_m A_n} \int \int \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dS'dS. \quad (21)$$

Существуют различные способы вычисления таких сингулярных интегралов. Одним из них является использование выражений в замкнутой форме (аналитические выражения) [2, 10–12]. Если треугольники функций RWG  $m$  и  $n$  частично или полностью «перекрываются», а размеры треугольников, на которых они определены, малы по сравнению с длиной волны, можно использовать разложение числителей из (20) и (21) в ряд Тейлора [13–15] как

$$e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \approx 1 - jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|. \quad (22)$$

Так, пусть  $T_m \equiv T$  и  $T_n \equiv T'$  и  $T_m = T_n$  ( $A_m = A_n = A$ ), тогда (21) преобразуются к виду

$$\frac{1}{A_m A_n} \int \int \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dS'dS \approx I_1 - jk, \quad (23)$$

где  $I_1$  определяется как

$$I_1 = \frac{1}{A_m A_n} \int \int \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dS'dS. \quad (24)$$

Для расчета такого сингулярного интеграла применимо аналитическое выражение [16]

$$\begin{aligned} I_1 &= 4 \left\{ \frac{1}{6\sqrt{a}} \ln \left[ \frac{(a-b+\sqrt{ad})(b+\sqrt{ac})}{(-b+\sqrt{ac})(-a+b+\sqrt{ad})} \right] + \right. \\ &+ \frac{1}{6\sqrt{a-2b+c}} \ln \left[ \frac{(a-b+\sqrt{ad})(-b+c+\sqrt{cd})}{(b-c+\sqrt{cd})(-a+b+\sqrt{ad})} \right] + \\ &\left. + \frac{1}{6\sqrt{c}} \ln \left[ \frac{(b+\sqrt{ac})(-b+c+\sqrt{cd})}{(b-c+\sqrt{cd})(-b+\sqrt{ac})} \right] \right\}, \quad (25) \end{aligned}$$

где  $a = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3)(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3)$ ,  $b = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3)(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$  и  $c = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ ,  $d = (a - 2b + c)$ ,  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  и  $\mathbf{r}_3$  – радиус-векторы вершин треугольников  $T = T'$ . Поскольку данное выражение является константой внутри треугольников  $T = T'$  и не зависит от выбора базисных функций, выражение (20) можно представить как

$$\frac{I_1 - jk}{A_m A_n} \int_{T_m} \boldsymbol{\rho}_m(\mathbf{r}) \cdot \int_{T_n} \boldsymbol{\rho}_n(\mathbf{r}') dS'dS. \quad (26)$$

В результате, подставив (23) и (26), например, в (16), получим

$$\begin{aligned} z_{T_m^+ T_n^+} &= \frac{l_m l_n}{4\pi A_m^+ A_n^+} \times \\ & \times \left[ \left( \frac{j\omega\mu(I_1 - jk)}{4} \iint_{T_m^+} \boldsymbol{\rho}_m^+(\mathbf{r}) \cdot \iint_{T_n^+} \boldsymbol{\rho}_n^+(\mathbf{r}') - \frac{jI_1}{\omega\epsilon} \right) \right]. \quad (27) \end{aligned}$$

Преобразование (17)–(19) для  $Z_{T_m T_n^-}$ ,  $Z_{T_m T_n^+}$  и  $Z_{T_m^+ T_n^-}$  выполняется аналогично.

Другой способ устранения сингулярности основывается на использовании симметричных квадратур Гаусса [17–19]. Здесь применяется локальная система координат в пределах треугольника. Для этого треугольник, например,  $T_n$  с площадью  $A_n$  разбивают на три субтреугольника с площадями  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$  соответственно (рис. 3). При этом нормированные локальные координаты определяются как

$$\lambda_1 = \frac{A_1}{A_n}, \lambda_2 = \frac{A_2}{A_n}, \lambda_3 = \frac{A_3}{A_n} \quad (28)$$

и

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \quad (29)$$

или

$$A_1 + A_2 + A_3 = A_n. \quad (30)$$

При таком представлении треугольника произвольная точка  $\mathbf{r}'$  в глобальных координатах может быть выражена в локальных координатах как

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \lambda_1 \mathbf{r}_1 + \lambda_2 \mathbf{r}_2 + \lambda_3 \mathbf{r}_3 = \\ &= \lambda_1 \mathbf{r}_1 + \lambda_2 \mathbf{r}_2 + (1 - \lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{r}_3. \end{aligned} \quad (31)$$

В треугольнике  $T_n$  все три координаты изменяются от нуля до единицы. В частности, в вершинах первичного треугольника  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3$  локальные координаты  $\lambda_1 - \lambda_3$  принимают значения  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  и  $(0, 0, 1)$  соответственно. В результате поверхностный интеграл функции  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  по треугольнику  $T_n$  может быть преобразован к виду

$$\begin{aligned} &\int_{T_n} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \\ &= 2A_n \int_{\lambda_1=0}^1 \int_{\lambda_2=0}^{1-\lambda_1} G(\lambda_1 \mathbf{r}_1 + \lambda_2 \mathbf{r}_2 + (1 - \lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{r}_3) d\lambda_2 d\lambda_1 = \\ &= 2A_n \int_{\lambda_1=0}^1 \int_{\lambda_2=0}^{1-\lambda_1} G(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_2 d\lambda_1. \end{aligned} \quad (32)$$

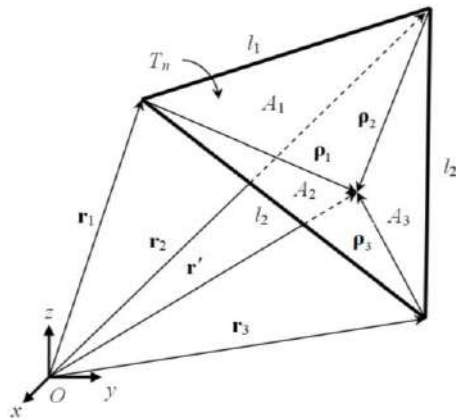


Рис. 3. Деление треугольника  $T_n$  на три субтреугольника

Использование квадратур Гаусса в численном интегрировании предполагает замену интеграла суммой выборок подынтегрального выражения. С

каждой точкой выборки связан весовой коэффициент  $w$  [17]

$$\begin{aligned} &A_n \int_{\lambda_1=0}^1 \int_{\lambda_2=0}^{1-\lambda_1} G(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_2 d\lambda_1 \approx \\ &\approx A_n \sum_{k=1}^{N_G} w_k f(\lambda_{1k}, \lambda_{2k}), \end{aligned} \quad (33)$$

где  $N_G$  – число точек выборки области интегрирования, а  $w_k$  – весовой коэффициент, связанный с выборкой  $k$  (для наглядности точки интегрирования при  $N_G = 3, 6$  и  $12$  показаны на рис. 4). Тогда, подставив (33), например, в (16), получают

$$\begin{aligned} z_{T_m^+ T_n^+} &= \frac{l_m l_n}{4\pi} \times \\ &\times \sum_{p=1}^{N_p} \sum_{q=1}^{N_q} w_p w_q \left[ \frac{j\omega\mu}{4} \mathbf{p}^+(\mathbf{r}_p) \cdot \mathbf{p}^+(\mathbf{r}_q) - \frac{j}{\omega\epsilon} \right] \frac{e^{-jk|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q|}}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q|}, \end{aligned} \quad (34)$$

где  $N_p$  – число точек выборки для вычисления внешнего, а  $N_q$  – внутреннего интегралов. Преобразование (17)–(19) для  $Z_{T_m T_n^-}$ ,  $Z_{T_m T_n^+}$  и  $Z_{T_m^+ T_n^-}$  выполняется аналогично.

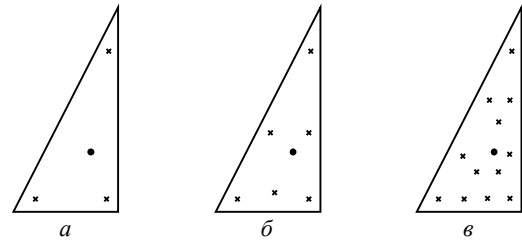


Рис. 4. К иллюстрации локальных координат на треугольнике при  $N_G = 3$  (а),  $6$  (б) и  $12$  (в) (черный круг – центр треугольника)

Также известен частный случай использования квадратур Гаусса – барцентрическое деление [3]. Суть этого способа заключается в разделении треугольного элемента сетки, по которому осуществляется интегрирование, на 9 субтреугольников [20, 21]. Полагая, что подынтегральное выражение является неизменным, в каждом из субтреугольников исходный интеграл (21) может быть записан как

$$\int_{T_n} \frac{e^{-jk|\mathbf{r}_m^c - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}_m^c - \mathbf{r}'|} dS' = \frac{S_n}{9} \sum_{i=1}^9 \frac{e^{-jk|\mathbf{r}_m^c - \mathbf{r}_{n,i}^c|}}{|\mathbf{r}_m^c - \mathbf{r}_{n,i}^c|}, \quad (35)$$

где  $\mathbf{r}_{n,i}^c$  – радиус-вектор центра субтреугольника  $i$  первичного треугольника  $n$  с площадью  $S_n$ .

Еще один способ устранения сингулярности для «перекрывающихся» функций – преобразование Даффи [22–25]. Подход также использует представление треугольника через локальные координаты. При этом требуется, чтобы сингулярность находилась в вершине треугольника. Если точка наблюдения расположена внутри треугольника, то он может быть разбит на три субтреугольника с новой вершиной, расположенной в точке сингулярности [26]. Для



$$\int_{T_n} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dS' = \sum_{i=1}^3 \mathbf{P}_i^0 \cdot \mathbf{u}_i \left[ P_i^0 \ln \frac{R_i^+ + l_i^+}{R_i^- + l_i^-} - \right. \\ \left. - |d| \left( \arctg \frac{P_i^0 l_i^+}{(R_i^0)^2 + |d| R_i^+} - \arctg \frac{P_i^0 l_i^-}{(R_i^0)^2 + |d| R_i^-} \right) \right]. \quad (55)$$

Для вычисления внутреннего интеграла в (42) необходимо представить вектор  $\mathbf{p}_n^+(\mathbf{r}')$  как

$$\mathbf{p}_n^+(\mathbf{r}') = (\mathbf{r}' - \mathbf{r}_n^+) = (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_n^+), \quad (56)$$

где  $\mathbf{r}_n^+$  – радиус вектор свободной вершины треугольника  $T_n^+$ . Тогда внутренний интеграл в (42) можно записать как

$$\int_{T_n} \frac{\mathbf{p}_n^+(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dS' = \int_{T_n} \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dS' + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_n^+) \int_{T_n} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dS'. \quad (57)$$

Второе слагаемое в (57) вычисляется по (55), а первое – как

$$\int_{T_n} \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dS' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \mathbf{u}_i \left[ (R_i^0)^2 \ln \frac{R_i^+ + l_i^+}{R_i^- + l_i^-} + l_i^+ R_i^+ - l_i^- R_i^- \right]. \quad (58)$$

Преобразование (17)–(19) для  $Z_{T_m T_n^-}$ ,  $Z_{T_m T_n^+}$  и  $Z_{T_m^+ T_n^-}$  выполняется аналогично.

Стоит отметить, что если точка наблюдения  $\mathbf{p}$  находится на ребре треугольника, то вклад этого ребра в (55) равен нулю. Когда в (52) и (55)  $\mathbf{r}$  лежит на  $S$  вдоль ребра ( $R_i^0 = 0$ ), необходимо сместить точку наблюдения на небольшое расстояние  $\epsilon ps$  [2], т.е.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r} + \epsilon ps \mathbf{u}. \quad (59)$$

Данный способ применим и для «неперекрывающихся» функций, расстояние между центрами треугольников которых меньше чем  $0,1 \dots 0,2\lambda$  [2].

#### Точность вычисления

Для сравнения точности моделирования при использовании различных способов вычисления сингулярных интегралов использована модель симметричной биконической антенны с параметрами из [28]. Моделирование проводилось на частотах  $f = 0,1, 0,5$  и  $1$  ГГц с использованием адаптивного уточнения сетки, в которой максимальный шаг составлял  $\lambda/10$  на частоте  $1$  ГГц (рис. 6). Расчетная сетка получена с помощью библиотеки GMSH [29].

Оценка точности выполнена на примере вычисления входного импеданса антенны, который находится напрямую из вектора  $\mathbf{i}$ , являющегося решением уравнения (13).

Рассмотрены следующие способы вычисления сингулярных интегралов:

– численный с использованием квадратур Гаусса (способ I);

– численный с использованием квадратур Гаусса для «неперекрывающихся» функций и комбинированный для вычисления «перекрывающихся» с взятием внешнего интеграла численно, а внутренне – аналитически (способ II);

– численный с использованием барицентрического деления треугольников на 9 субтреугольников (способ III);

– аналитические выражения для вычисления «перекрывающихся» функций и одноточечное интегрирование для остальных (способ IV);

– численный с использованием преобразования Даффи с 9 точками интегрирования для одного субтреугольника (способ V).

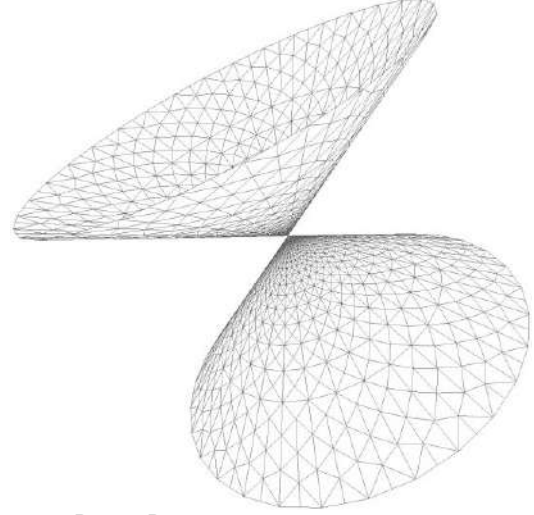


Рис. 6. Расчетная сетка симметричной биконической антенны

Результаты моделирования входного импеданса в авторской реализации вычислений в GNU Octave сравнивались с аналогичными результатами, полученными в стороннем программном обеспечении (ПО) на основе метода моментов. В табл. 1 и 2 представлены результаты вычисления входного импеданса с использованием способов I и II при изменении чисел точек интегрирования для внешнего и внутреннего интегралов соответственно. В табл. 3 представлены отклонения модуля и угла фазы входного импеданса от полученного в стороннем ПО. Отклонения модуля входного импеданса вычислялись по формуле относительной погрешности [30]. В табл. 4 сведены вычисленные значения входного импеданса способами III–V. В табл. 5 представлены их отклонения от результатов стороннего ПО.

Исходя из табл. 1 и 2, видно, что использование способов I и II дает близкие результаты, хотя и имеют некоторые различия в зависимости от комбинации параметров  $N_q$  и  $N_p$ . Способы I и II показали близкую точность по сравнению со сторонним ПО, однако способ I дает более близкие результаты на частоте  $0,1$  ГГц, а способ II – на частоте  $0,5$  ГГц. Так, средние отклонения при использовании способов I и II составили соответственно на частоте  $0,1$  ГГц –  $1,2$  и  $2,7$  %, на частоте  $0,5$  ГГц –  $1,9$  и  $1,0$  %, а на  $1$  ГГц –  $1,5$  и  $1,5$  %. Также способы I и II обеспечили приемлемое отклонение фазового угла со средним отклонением около  $1^\circ$ . Однако способ I позволил получить меньшее отклонение фазового угла на частоте  $1$  ГГц, а способ II – на частоте  $0,1$  ГГц.

Таблица 1

**Входной импеданс (Ом) симметричной биконической антенны, вычисленный с использованием способа I**

$f, \text{ГГц}$	$N_q = 1, N_p = 3$	$N_q = 1, N_p = 6$	$N_q = 1, N_p = 12$	$N_q = 3, N_p = 6$	$N_q = 3, N_p = 12$	$N_q = 4, N_p = 6$	$N_q = 4, N_p = 12$	$N_q = 6, N_p = 12$	Стороннее ПО
0,1	20,7+j13,6	20,6+j13,5	20,9+j14,1	20,9+j14,0	20,9+j14,0	20,8+j14,1	20,8+j14,0	20,9+j14,0	21,1+j14,7
0,5	96,1+j9,6	96,3+j10,0	96,2+j9,9	96,6+j8,6	96,7+j8,7	96,6+j8,5	96,7+j8,9	96,7+j8,6	97,6+j8,1
1	78,5+j3,8	78,6+j3,8	78,6+j3,7	79,2+j5,0	79,2+j5,0	79,2+j5,0	79,3+j5,0	79,2+j5,0	80,1+j5,5

Таблица 2

**Входной импеданс (Ом) симметричной биконической антенны, вычисленный с использованием способа II**

$f, \text{ГГц}$	$N_q = 1, N_p = 3$	$N_q = 1, N_p = 6$	$N_q = 1, N_p = 12$	$N_q = 3, N_p = 6$	$N_q = 3, N_p = 12$	$N_q = 4, N_p = 6$	$N_q = 4, N_p = 12$	$N_q = 6, N_p = 12$	Стороннее ПО
0,1	21,5+j15,2	21,1+j14,4	21,0+j14,2	21,4+j15,1	21,2+j14,6	21,5+j15,3	20,8+j15,3	21,2+j14,7	21,1+j14,7
0,5	94,9+j5,6	95,6+j7,8	95,7+j8,2	95,8+j5,9	96,2+j7,1	95,6+j4,9	96,7+j8,8	96,1+j6,8	97,6+j8,1
1	78,4+j3,0	78,5+j3,6	78,5+j3,7	79,4+j4,4	79,3+j4,7	79,4+j3,7	79,3+j5,0	79,3+j4,6	80,1+j5,5

Таблица 3

**Отклонения модуля, %, и угла фазы, ° (в скобках), входного импеданса из табл. 1 и 2 от результатов стороннего ПО**

$f, \text{ГГц}$	Способ	$N_q = 1, N_p = 3$	$N_q = 1, N_p = 6$	$N_q = 1, N_p = 12$	$N_q = 3, N_p = 6$	$N_q = 3, N_p = 12$	$N_q = 4, N_p = 6$	$N_q = 4, N_p = 12$	$N_q = 6, N_p = 12$	Среднее
0,1	I	2,4 (1,6)	0,7 (1,6)	1,4 (0,8)	1,8 (1,0)	0,1 (1,0)	2,6 (0,7)	0,4 (0,9)	0,3 (1,0)	1,2 (1,1)
	II	3,7 (0,4)	4,2 (0,6)	2,0 (0,8)	2,2 (0,3)	2,2 (0,3)	2,3 (0,6)	2,5 (1,5)	2,2 (0,1)	2,7 (0,6)
0,5	I	2,9 (0,9)	2,1 (1,2)	1,9 (1,1)	2,0 (0,3)	1,5 (0,4)	2,3 (0,3)	0,9 (0,5)	1,6 (0,3)	1,9 (0,6)
	II	1,4 (1,4)	1,1 (0,1)	1,3 (0,2)	1,0 (1,2)	0,9 (0,5)	1,0 (1,8)	0,8 (0,5)	0,9 (0,7)	1,1 (0,8)
1	I	2,3 (1,2)	2,1 (1,2)	2,1 (1,2)	1,0 (0,3)	1,1 (0,3)	1,0 (0,3)	1,0 (0,3)	1,1 (0,3)	1,5 (0,6)
	II	2,1 (1,7)	2,0 (1,3)	2,0 (1,2)	1,2 (0,8)	1,2 (0,5)	1,2 (1,3)	1,0 (0,3)	1,2 (0,6)	1,5 (1,0)

Таблица 4

**Входной импеданс (Ом) симметричной биконической антенны, вычисленный с использованием способов III, IV и V**

Способ	$f, \text{ГГц}$		
	0,1	0,5	1
III	21,1+j13,3	95,5+j7,9	78,4+j3,5
IV	21,0+j14,3	95,1+j8,2	78,1+j2,9
V	20,6+j13,4	96,4+j10,2	78,7+j3,6
Стороннее ПО	21,1+j14,7	97,6+j8,1	80,1+j5,5

Таблица 5

**Отклонения модуля (%) и угла фазы (°) входного импеданса из табл. 5 от результатов стороннего ПО**

Способ	$f, \text{ГГц}$		
	0,1	0,5	1
III	3,0 (2,6)	2,2 (0,02)	2,3 (1,4)
IV	1,2 (0,6)	2,5 (0,2)	2,7 (1,8)
V	4,4 (1,8)	1,0 (1,3)	1,9 (1,3)

На частоте 0,1 ГГц оба способа чувствительны к выбору параметров  $N_p$  и  $N_q$ . Отклонения способа I варьируются от 0,1 до 2,6 %, а способа II – от 2,0 до 4,2 %. На более высоких частотах влияние этих параметров на отклонения становится менее выраженным, а способ II демонстрирует большую стабильность результатов. Так, на частоте 0,5 ГГц диапазон отклонений способа I составляет от 0,9 до 2,9 %, а на частоте 1 ГГц – от 1,0 до 2,3 %. Отклонения способа II на частоте 0,5 ГГц варьируются от 0,8 до 1,4 %, а на частоте 1 ГГц – от 1,0 до 2,1 %.

Несмотря на то, что вариации параметров  $N_q$  и  $N_p$  влияют на результаты, наблюдаемые различия между разными комбинациями не являются значительными для большинства частот. Это может свидетельствовать о том, что при определенных условиях возможно упрощение расчетов путем выбора

оптимальных комбинаций  $N_q$  и  $N_p$ , что уменьшит вычислительные затраты без значительной потери в точности.

Способ III демонстрирует отклонения от результатов стороннего ПО со средним уровнем в 2,5 %. Способ IV показал отклонения, сопоставимые со способом III, показывая лучшую согласованность на 0,1 ГГц (1,2 %), но более значительные отклонения на остальных частотах. Способ V показал значительное отклонение на частоте 100 МГц – 4,4 %. Однако на частотах 500 МГц и 1 ГГц этот способ позволил получить наименьшие отклонения.

**Валидация результатов**

Для валидации результатов использованы опубликованные экспериментальные данные и две антенны: биконическая и типа «бабочка».

На рис. 7 представлены реальная и мнимая части входного импеданса биконической антенны с углом раскрытия  $60^\circ$  при изменении электрической длины ее плеч ( $L$ , град), полученные экспериментально [31], в стороннем ПО и с использованием авторской реализации вычислений. Стоит отметить, в эксперименте из [31] использовался только один конический элемент, расположенный над металлическим экраном, поэтому при сравнении результатов учитывалось, что расчетное значение входного импеданса в два раза больше экспериментального [1]. Результаты, полученные способами I–V, имеют схожий характер, поэтому для удобства восприятия на рис. 7 представлены только способы I ( $N_q = 4, N_p = 12$ ) и III. Из рис. 7 видно, что расчетные и экспериментальные значения входного импеданса хорошо согласуются между собой во всем исследованном диапазоне. Отклонения результатов моделирования реальной части входного импеданса от экспе-

римента изменяются от 0,3 до 22 Ом, а мнимой – от 0,2 до 40 Ом. Различие можно объяснить упрощенной моделью возбуждения, которая использовалась при моделировании. Так, в эксперименте конический элемент возбуждался посредством коаксиального кабеля, а при моделировании использовалась модель в виде бесконечно тонкого зазора [2]. При этом результаты моделирования показали близкие результаты. Так, наименьшее отклонение от стороннего ПО имеет способ I ( $N_q = 4$ ,  $N_p = 12$ ). Во всем диапазоне отклонения составляют менее 1 Ом, а мнимой – 0,18 Ом.

Наибольшие отклонения получены при использовании способа III – от 0,01 до 4,4 Ом для реаль-

ной части и от 0,03 до 3,2 Ом для мнимой. Другие способы также имеют близкие результаты с отклонением не более 3 %.

Дополнительно выполнено сравнение результатов на примере антенны типа «бабочка» с углом раскрытия  $90^\circ$  (рис. 8). Экспериментальные данные получены для одного плеча антенны «бабочка», расположенного над металлическим экраном и возбуждаемого посредством коаксиального кабеля [31]. Измерения проводились на одной частоте при изменении длины антенны ( $h$ ). Моделирование выполнялось в авторской реализации с использованием способов I–V и в стороннем ПО. Для удобства восприятия на рис. 8 представлены результаты использования способов I ( $N_q = 4$ ,  $N_p = 12$ ) и III.

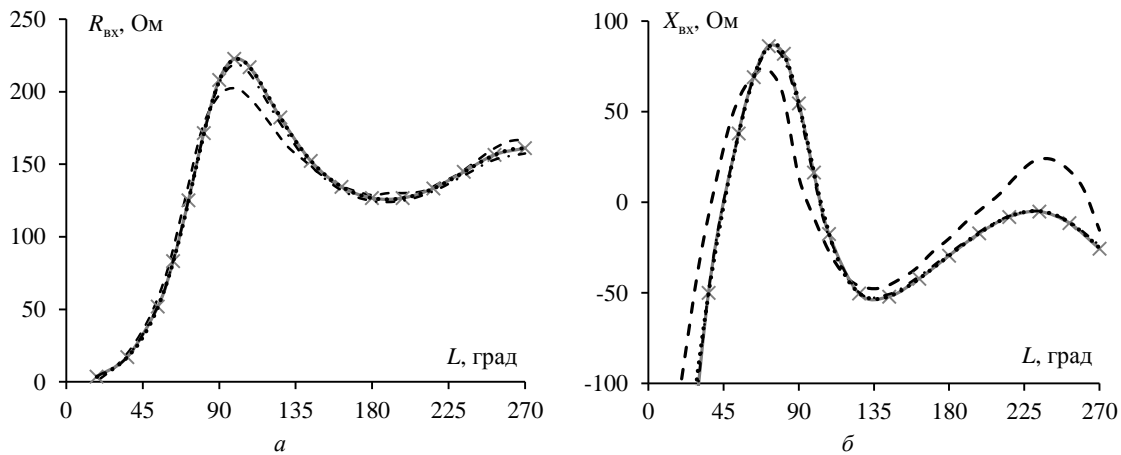


Рис. 7. Реальная  $R_{вх}$  (а) и мнимая  $X_{вх}$  (б) части входного импеданса биконической антенны при изменении электрической длины ее плеча ( $L$ ): I (—x—) и III (— · —), стороннее ПО (· · ·), эксперимент (— —)

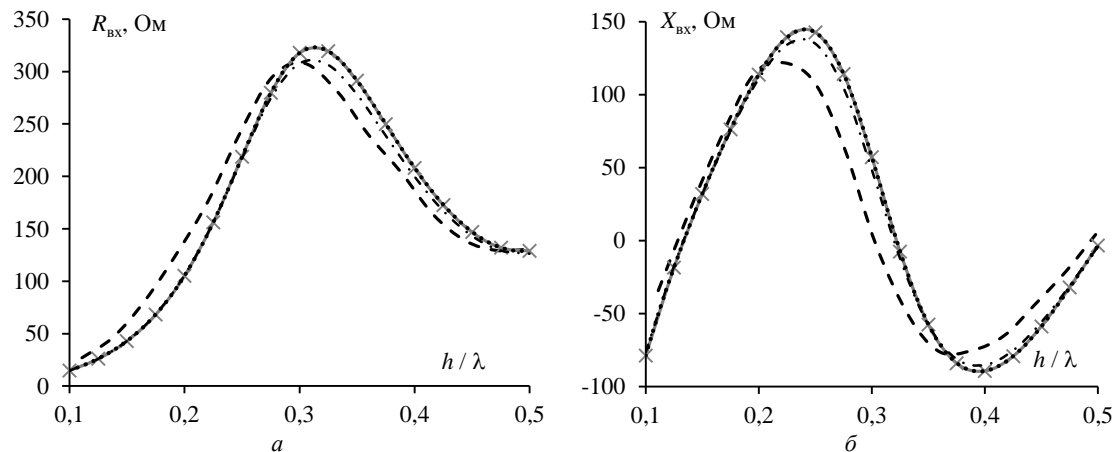


Рис. 8. Реальная  $R_{вх}$  (а) и мнимая  $X_{вх}$  (б) части входного импеданса антенны типа «бабочка» при изменении длины антенны ( $h$ ): I (—x—) и III (— · —), стороннее ПО (· · ·), эксперимент (— —)

Из рис. 8 видно, что результаты моделирования и эксперимента имеют схожий характер, однако наблюдается отклонения до 39 Ом для реальной части и до 51 Ом для мнимой. Результаты моделирования более согласованы между собой. Меньшее отклонение от стороннего ПО дает способ I ( $N_q = 4$ ,  $N_p = 12$ ). Во всем диапазоне для способа I отклонения составляют менее 1 Ом. Для способа III откло-

нения варьируются от 0,01 до 4,4 Ом для реальной части и от 0,03 до 3,2 Ом для мнимой. Другие способы также имеют близкие результаты с отклонением не более 6 %.

#### Вычислительная сложность

Способы вычисления сингулярных интегралов отличаются не только точностью, но и вычислительной сложностью. Асимптотическая сложность всех



рассмотренных способов для формирования одного элемента матрицы  $\mathbf{Z}$  составляет  $O(1)$ , а всей матрицы –  $O(N^2)$ , где  $N$  – число функций RWG. Поэтому для более качественного сравнения рассмотренных способов выполнена оценка арифметических затрат ( $Q$ ) на формирование матрицы  $\mathbf{Z}$ . Так, сначала вычислено число операций  $m$ , требуемых для расчета одного слагаемого из (14). При этом для способов II и IV рассмотрены два случая: вычисление слагаемых с сингулярностью (вариант  $a$ ) и без сингулярности (вариант  $b$ ). Полученные результаты сведены в табл. 6.

Таблица 6

Число арифметических операций  $m$  для вычисления одного слагаемого из (14)

Способ вычисления						
I	II- $a$	II- $b$	III	IV- $a$	IV- $b$	V
$33N_pN_q$	$35N_pN_q + 333N_p$	$33N_pN_q$	297	21	33	891

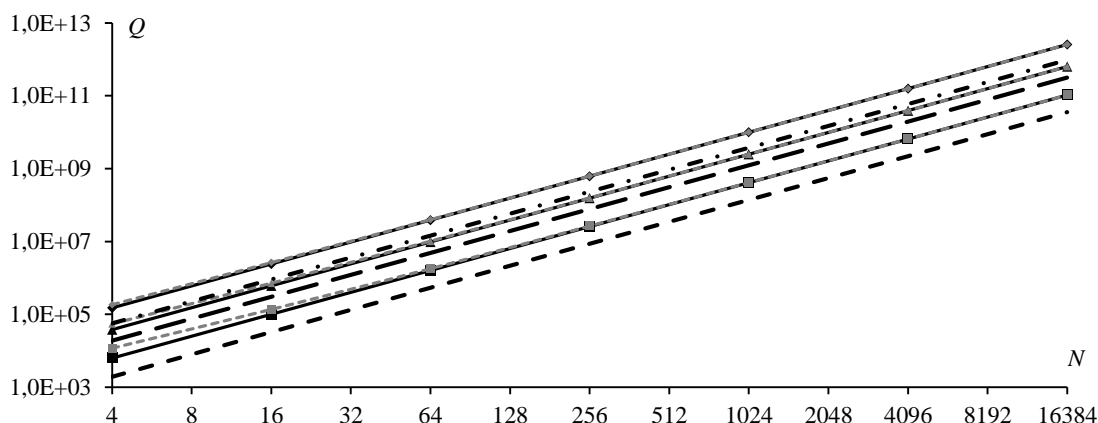


Рис. 9. Зависимость  $Q$  от  $N$  при формировании матрицы  $\mathbf{Z}$ :  
 способ I при  $N_p = 1, N_q = 3$  (—■—), при  $N_p = 3, N_q = 6$  (—▲—) и  $N_p = 6, N_q = 12$  (—◆—),  
 способ II при  $N_p = 1, N_q = 3$  (---■---), при  $N_p = 3, N_q = 6$  (---▲---) и  $N_p = 6, N_q = 12$  (---◆---),  
 способ III (---), способ IV (---) и способ V (---)

Как видно из рис. 9, способы I и II демонстрируют схожую тенденцию роста числа арифметических операций. Однако при малых значениях  $N$  при использовании способа II требуется больше операций по сравнению со способом I. Изменение параметров  $N_q$  и  $N_p$  оказывает заметное влияние на число необходимых операций, подчеркивая важность определения выбора оптимальных комбинаций этих параметров. Наименьшее число арифметических операций удается достичь при использовании способа IV, а наибольшее – способов I и II при  $N_p = 6$  и  $N_q = 12$ , а также способа V.

Таким образом, выявлено, что более высокая вычислительная сложность не всегда коррелирует с увеличением точности. Некоторые способы, требующие большего числа арифметических операций (например, способ V), не всегда обеспечивают существенно лучшую точность по сравнению с менее ресурсоемкими способами.

**Заключение**

В данной работе представлен обзор способов вычисления поверхностных сингулярных интегралов

Общее число арифметических операций для формирования матрицы  $\mathbf{Z}$ , используя способы I, III и V, составляет

$$M = 4mN^2, \tag{60}$$

а способы II и III –

$$M = (4m_a)(N^2 - N_{II} - N_{III}) + (2m_a + 2m_b)N_{II} + (m_a + 3m_b)N_{III}, \tag{61}$$

где  $m_a$  и  $m_b$  – число операций для вычисления одного слагаемого элемента  $\mathbf{Z}$  с и без сингулярности соответственно,  $N_{II}$ ,  $N_{III}$  и  $N_{III}$  – число «перекрывающихся», частично «перекрывающихся» и не перекрывающихся функций RWG.

Для наглядности изменение общего числа операций на формирование матрицы  $\mathbf{Z}$  при последовательном увеличении  $N$  от 4 до 16384 для всех способов представлено на рис. 9.

при формировании СЛАУ методом моментов в ходе решения антенных задач методов моментов. На примере симметричной биконической антенны выявлено, что численный способ с использованием квадратур Гаусса и комбинированный способ демонстрируют сопоставимые уровни точности. Однако число точек интегрирования, используемых в этих способах, сильно влияет на точность результатов и требуемые вычислительные затраты. При этом комбинированный способ дает более стабильные результаты с изменением числа таких точек. Способ, использующий только аналитические выражения для вычисления «перекрывающихся» функций, выделяется как наиболее эффективный с точки зрения вычислительных затрат. Способ, использующий преобразование Даффи, показал хорошую точность при вычислении входного импеданса на верхней частоте рассматриваемого диапазона, но на нижней частоте его точность снижается, оказываясь ниже, чем у других рассмотренных способов. Численный способ, использующий барицентрическое деление, показал средние результаты как по вычислительным

загратам, так и по точности вычисления. Кроме того, выявлено, что более высокая вычислительная сложность не всегда коррелирует с увеличением точности.

Выполнено сравнение результатов моделирования входного импеданса биконической антенны и антенны типа «бабочка» с экспериментальными данными. Полученные результаты имеют схожий характер, однако имеют отклонения, которые можно объяснить упрощенной моделью возбуждения, которая использовалась при моделировании, а также возможными погрешностями измерений. Наиболее точным оказался способ с использованием квадратур Гаусса для вычисления поверхностных сингулярных интегралов, а наименее точным – способ, использующий только аналитические выражения для вычисления «перекрывающихся» функций.

Полученные результаты демонстрируют, что выбор способа вычисления сингулярных интегралов должен зависеть от конкретных требований задачи и доступных вычислительных ресурсов. Для получения быстрых предварительных результатов можно использовать один из вычислительно простых способов: численный или комбинированный с использованием квадратур Гаусса с небольшим числом точек интегрирования либо только аналитические выражения. Для получения более точных результатов рекомендуется использовать численный или комбинированный способы с использованием квадратур Гаусса с большим числом точек интегрирования либо преобразование Даффи.

В дальнейшем целесообразно провести комплексное исследование для подбора оптимального числа точек интегрирования при использовании квадратур Гаусса для достижения рационального соотношения между точностью и вычислительными затратами, что особенно актуально при решении сложных антенных задач в условиях ограниченных вычислительных ресурсов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России по проекту FEWM-2024-0005.

Авторы выражают благодарность анонимному рецензенту, конструктивные замечания которого позволили повысить качество работы.

### Литература

1. Balanis C.A. Advanced engineering electromagnetics. 2nd ed. – New York: John Wiley & Sons, 2012. – 1045 p.
2. Григорьев А.Д. Методы вычислительной электродинамики. – М.: Физматлит, 2013. – 430 с.
3. Makarov S.N. Antenna and EM modeling with MATLAB. – New York: John Wiley & Sons, 2002. – 288 p.
4. Harrington R.F. Matrix methods for field problems // Proceedings of the IEEE. – 1967. Vol. 55, No. 2. – P. 136–149.
5. Characterization and integration of the singular test integrals in the method-of-moments implementation of the electric-field integral equation / B.A. Freno, W.A. Johnson, B.F. Zinser, D.R. Wilton, F. Vipiana, S. Campione // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2021. – Vol. 124. – P. 185–193.
6. Rao S. Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape / S. Rao, D. Wilton, A. Glisson // IEEE Transac-

tions on antennas and propagation. – 1982. – Vol. 30, No. 3. – P. 409–418.

7. Mosig J.R. Integral equation technique / J.R. Mosig, T. Itoh // Numerical Techniques for Microwave and Millimeter-Wave Passive Structures. – 1989. – P. 133–213.

8. Balanis C.A. Antenna theory: analysis and design. – 3rd ed. – New York: John Wiley & Sons, 2005. – 1097 p.

9. Митра Р. Вычислительные методы в электродинамике. – М.: Мир, 1977. – 487 с.

10. Potential integrals for uniform and linear source distributions on polygonal and polyhedral domains / D. Wilton, S. Rao, A. Glisson, D. Schaubert, O. Al-Bundak, C. Butler // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 1984. – Vol. 32, No. 3. – P. 276–281.

11. Костарев И.С. Аналитическая оценка элементов матрицы СЛАН в задаче электромагнитного рассеяния поверхностями произвольной формы / И.С. Костарев, Т.Р. Газизов, Ю.М. Казанцев // Численные методы и вопросы организации вычислений: Записки научных семинаров Санкт-Петербургского отделения математического института им. В.А. Стеклова РАН. – 2013. – Т. 419. – С. 154–167.

12. Makarov S.N. Low-frequency electromagnetic modeling for electrical and biological systems using MATLAB / S.N. Makarov, G.M. Noetscher, A. Nazarian. – New York: John Wiley & Sons, 2015.

13. Mahadevan K. Electromagnetic field of a rectangular patch of uniform and linear distributions of current / K. Mahadevan, H.A. Auda // IEEE Transactions on antennas and propagation. – 1989. – Vol. 37, No. 12. – P. 1503–1509.

14. Analytical evaluation of the MoM matrix elements / L. Alatan, M.I. Aksum, K. Mahadevan, M.T. Birand // IEEE Transactions on microwave theory & techniques. – 1996. – Vol. 44, No. 4. – P. 519–525.

15. Chua E.K. Accurate and efficient computation of MoM matrix involving 2D triangular basis function with line matching / E.K. Chua, K.Y. See, Z.N. Liu // International Journal of computational methods. – 2006. – Vol. 3, No. 3. – P. 355–370.

16. Eibert T.F. On the calculation of potential integrals for linear source distributions on triangular domains / T.F. Eibert, V. Hansen // IEEE transactions on antennas and propagation. – 1995. – Vol. 43, No. 12. – P. 1499–1502.

17. Dunavant D.A. High degree efficient symmetrical Gaussian quadrature rules for the triangle // International journal for numerical methods in engineering. – 1985. – Vol. 21, No. 6. – P. 1129–1148.

18. Savage J.S. Quadrature rules for numerical integration over triangles and tetrahedral / J.S. Savage, A.F. Peterson // IEEE Antennas and Propagation Magazine. – 1996. – Vol. 38, No. 3. – P. 100–102.

19. Hayami K. A numerical quadrature for nearly singular boundary element integrals / K. Hayami, H. Matsumoto // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 1994. – Vol. 13, No. 2. – P. 143–154.

20. Kamen Y. Triangle rendering using adaptive subdivision / Y. Kamen, L. Shirman // IEEE Computer graphics and applications. – 1998. – P. 95–103.

21. Система компьютерного моделирования антенн методом моментов / А.А. Квасников, А.В. Демаков, А.А. Иванов, Д.В. Клюкин, М.Е. Комнатнов, С.П. Куксенко // Системы управления, связи и безопасности. – 2022. – № 1. – С. 49–66.

22. Duffy M.G. Quadrature over a pyramid or cube of integrands with a singularity at a vertex // SIAM Journal of numerical analysis. – 1982. – Vol. 19. – P. 1260–1262.

23. Mousavi S.E. Generalized Duffy transformation for integrating vertex singularities / S.E. Mousavi, N. Sukumar // *Computational Mechanics*. – 2010. – Vol. 45. – P. 127–140.
24. Botha M.M. A family of augmented Duffy transformations for near-singularity cancellation quadrature // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. – 2013. – Vol. 61, No. 6. – P. 3123–3134.
25. Khayat M.A. Numerical evaluation of singular and near-singular potential integrals / M.A. Khayat, D.R. Wilton // *IEEE transactions on antennas and propagation*. – 2005. – Vol. 53, No. 10. – P. 3180–3190.
26. Gibson W.C. The method of moments in electromagnetics. – Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2008. – 272 p.
27. Graglia R.D. On the numerical integration of the linear shape functions times the 3-D Green's function or its gradient on a plane triangle // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. – 1993. – Vol. 41. – P. 1448–1454.
28. Alhaj Hasan A. On Wire-Grid Representation for Modeling Symmetrical Antenna Elements / A. Alhaj Hasan, D.V. Klyukin, A.A. Kvasnikov, M.E. Komnatnov, S.P. Kuksenko // *Symmetry*. – 2022. – Vol. 14. – P. 1354.
29. GMSH: Официальный сайт Gmsh – A three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. URL: <https://gmsh.info/> (дата обращения: 12.10.2022).
30. Мочалов Д.М. Оценка вычислительных затрат способов устранения сингулярности при моделировании антенн методом моментов / Д.М. Мочалов, Д.В. Ключин // *Электронные средства и системы управления* – 2023. – Т. 2. – С. 35–37.
31. Brown G.H. Experimentally determined radiation characteristics of conical and triangular antennas / G.H. Brown, O.M. Woodward // *RCA Rev.* – 1952. – No. 4. – P. 425.

#### Ключин Дмитрий Владимирович

Мл. науч. сотр. научно-исследовательской лаборатории «Безопасность и электромагнитная совместимость радиоэлектронных средств» (НИЛ «БЭМС РЭС»), аспирант каф. телевидения и управления (ТУ) Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники (ТУСУР)  
Ленина пр-т, 40, г. Томск, Россия, 634050  
ORCID: 0000-0002-0343-482X  
Тел.: +7-999-499-76-45  
Эл. почта: [dv\\_klyukin@tu.tusur.ru](mailto:dv_klyukin@tu.tusur.ru)

#### Мочалов Дмитрий Михайлович

Инженер НИЛ «БЭМС РЭС» ТУСУРа  
Ленина пр-т, 40, г. Томск, Россия, 634050  
ORCID: 0009-0008-8822-0353  
Тел.: +7-913-889-18-78  
Эл. почта: [dm\\_mochalov@tu.tusur.ru](mailto:dm_mochalov@tu.tusur.ru)

#### Куksenko Сергей Петрович

Д-р техн. наук, доцент, зав. НИЛ «БЭМС РЭС», проф. каф. ТУ, ТУСУР  
Ленина пр-т, 40, г. Томск, Россия, 634050  
ORCID: 0000-0001-9713-458X  
Тел.: +7 (382-2) 41-34-39  
Эл. почта: [ksergp@tu.tusur.ru](mailto:ksergp@tu.tusur.ru)

Klyukin D.V., Mochalov D.M., Kuksenko S.P.

#### On techniques to compute surface singular integrals for formulating the matrix-vector equation of the moment method when solving antenna problems

This paper compares the efficiency of different ways to compute singular integrals for solving antenna problems using moment method matrix-vector equations. We use a biconical antenna as an example to assess the accuracy of different singular integral computation approaches. We also evaluate the computational complexity of the examined approaches and provide recommendations for the selection of the most optimal approach.

**Keywords:** numerical methods, method of moments, surface singular integrals, quadrature formulas, computational complexity, antennas.

**DOI:** 10.21293/1818-0442-2024-27-1-23-34

#### References

- Balanis C.A. *Advanced engineering electromagnetics*. 2nd ed. – New York: John Wiley & Sons Publ., 2012. – 1045 p.
- Grigoryev A.D. *Metody vychislitel'noy elektrodinamyki* [Methods of computational electrodynamics]. Moscow, Physical education Publ., 2013. 430 p. (in Russ.).
- Makarov S.N. *Antenna and EM modeling with MATLAB*. New York, John Wiley & Sons Publ., 2002, 288 p.
- Harrington R.F. Matrix methods for field problems. *Proceedings of the IEEE*, 1967, vol. 55, no. 2, pp. 136–149.
- Freno B.A., Johnson W.A., Zinser B.F., Wilton D.R., Vipiana F., Campione S. Characterization and integration of the singular test integrals in the method-of-moments implementation of the electric-field integral equation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2021, vol. 124, pp. 185–193.
- Rao S., Wilton D., Glisson A. Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1982, vol. 30, no. 3, pp. 409–418.
- Mosig J.R., Itoh T. Integral equation technique Numerical *Techniques for Microwave and Millimeter-Wave Passive Structures*, 1989. pp. 133–213.
- Balanis C.A. *Antenna theory: analysis and design*. 3rd ed. New York: John Wiley & Sons Publ., 2005, 1097 p.
- Mitra R. *Vichislitel'nye metody v elektrodinamyke* [Computational methods in electrodynamics]. Moscow, World Publ., 1977, 487 p. (in Russ.).
- Wilton D., Rao S., Glisson A., Schaubert D., Al-Bundak O., Butler C. Potential integrals for uniform and linear source distributions on polygonal and polyhedral domains. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1984, vol. 32, no. 3, pp. 276–281.
- Kostarev I.S., Gazizov T.R., Kazantsev Y.M. [Analytical evaluation of the matrix entires for linear algebraic systems in the problem of electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape]. *Numerical methods and issues of computing organization: Notes of scientific seminars of the St. Petersburg Department of the Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences*, 2013, vol. 419, no. 1, pp. 154–167 (in Russ.).
- Makarov S.N., Noetscher G.M., Nazarian A. *Low-frequency electromagnetic modeling for electrical and biological systems using MATLAB*. New York: John Wiley & Sons., 2015.
- Mahadevan K., Auda H.A. Electromagnetic field of a rectangular patch of uniform and linear distributions of current. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1989, vol. 37, no. 12, pp. 1503–1509.
- Alatan L., Aksum M.I., Mahadevan K., Birand M.T., Analytical evaluation of the MoM matrix elements. *IEEE*

- Transactions on Microwave Theory & Techniques*, 1996, vol. 44, no. 4, pp. 519–525.
15. Chua E.K., See K.Y., Liu Z.N. Accurate and efficient computation of MoM matrix involving 2D triangular basis function with line matching. *International Journal of Computational Methods*, 2006, vol. 3, no. 3, pp. 355–370.
16. Eibert T.F., Hansen V. On the calculation of potential integrals for linear source distributions on triangular domains. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1995, vol. 43, no. 12, pp. 1499–1502.
17. Dunavant D.A. High degree efficient symmetrical Gaussian quadrature rules for the triangle. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1985, vol. 21, no. 6, pp. 1129–1148.
18. Savage J.S., Peterson A.F. Quadrature rules for numerical integration over triangles and tetrahedral. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 1996, vol. 38, no. 3, pp. 100–102.
19. Hayami K., Matsumoto H. A numerical quadrature for nearly singular boundary element integrals. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 1994, vol. 13, no. 2, pp. 143–154.
20. Kamen Y., Shirman L. Triangle rendering using adaptive subdivision. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 1998, pp. 95–103.
21. Kvasnikov A.A., Demakov A.V., Ivanov A.A., Klyukin D.V., Komnatnov M.E., Kuksenko S.P. [System of computer modeling of antennas by the method of moments]. *Control, Communication and Security Systems*. 2022, no. 1, pp. 49–66.
22. Duffy M.G. Quadrature over a pyramid or cube of integrands with a singularity at a vertex. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 1982, vol. 19, pp. 1260–1262.
23. Mousavi S.E., Sukumar N. Generalized Duffy transformation for integrating vertex singularities. *Computational Mechanics*, 2010, vol. 45, pp. 127–140.
24. Botha M.M. A family of augmented Duffy transformations for near-singularity cancellation quadrature. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2013, vol. 61, no. 6, pp. 3123–3134.
25. Khayat M.A., Wilton D.R. Numerical evaluation of singular and near-singular potential integrals. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2005, vol. 53, no. 10, pp. 3180–3190.
26. Gibson W.C. *The method of moments in electromagnetics*. Boca Raton, Chapman & Hall/CRC, 2008, 272 p.
27. Graglia R.D. On the numerical integration of the linear shape functions times the 3-D Green's function or its gradient on a plane triangle // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 1993, vol. 41, pp. 1448–1454.
28. Alhaj Hasan A., Klyukin D.V., Kvasnikov A.A., Komnatnov M.E., Kuksenko S.P. On Wire-Grid Representation for Modeling Symmetrical Antenna Elements. *Symmetry*, 2022, vol. 14, pp. 1354.
29. GMSH [web]: Official website: Gmsh – A three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. Available at: <https://gmsh.info>, free (Accessed: October 12, 2022).
30. Mochalov D.M., Klyukin D.V. [Evaluation of computational cost of singularity elimination methods in antenna modeling by the method of moments]. *Electronic Means and Control Systems*. 2023, vol. 2, pp. 35–37 (in Russ.).
31. Brown G. H. Experimentally determined radiation characteristics of conical and triangular antennas / G.H. Brown, O.M. Woodward // *RCA Rev.* 1952, no. 4, pp. 425.

---

#### Dmitry V. Klyukin

Junior Researcher, Research Laboratory «Safety and Electromagnetic Compatibility of Radioelectronic Facilities» Postgraduate student, Department of Television and Control, Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics (TUSUR)  
40, Lenin pr., Tomsk, Russia, 634050.  
ORCID: 0000-0002-0343-482X  
Phone: +7-999-499-76-45  
Email: dv\_klyukin@tu.tusur.ru

#### Dmitry M. Mochalov

Engineer, Research Laboratory Safety and Electromagnetic Compatibility of Radioelectronic Facilities», TUSUR  
40, Lenin pr., Tomsk, Russia, 634050  
ORCID: 0009-0008-8822-0353  
Phone: +7-913-889-18-78  
Email: dm\_mochalov@tu.tusur.ru

#### Sergey P. Kuksenko

Doctor of Science in Engineering, Associate Professor, Head of the Research Laboratory Safety and Electromagnetic Compatibility of Radioelectronic Facilities», TUSUR  
40, Lenin pr., Tomsk, Russia, 634050  
ORCID: 0000-0001-9713-458X  
Phone: +7 (382-2) 41-34-39  
Email: ksergp@tu.tusur.ru