

**АНАЛИЗ РАССЕЙВАЮЩИХ СТРУКТУР МЕТОДОМ МОМЕНТОВ  
С ТЕОРИЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ МОД: РАССЕЙННОЕ ПОЛЕ ПРЯМОГО ПРОВОДНИКА**

**ANALYSIS OF SCATTERING STRUCTURES BY THE METHOD OF MOMENTS  
WITH THE THEORY OF CHARACTERISTIC MODES: SCATTERING FIELD OF A STRAIGHT WIRE**

**Т. Ф. Данг, А. Ф. Алхадж Хасан**

*Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, г. Томск, Россия*

**T. P. Dang, A. F. Alhaj Hasan**

*Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics*

**Аннотация.** Выполнена верификация рассеяния прямого провода с помощью программы, разработанной на основе теории характеристических мод и метода моментов. Результаты, полученные программой, сравнивались с опубликованными в другой работе и рассчитанными по методу моментов со ступенчатыми базисными функциями. Рассмотрены собственные значения, модальные значения, характеристические углы, характеристические токи, распределение тока, характеристические и рассеянные поля. Продемонстрировано влияние применения критерия устранения ненужных мод на расчетные распределения тока и поля рассеяния.

**Ключевые слова:** теория характеристических мод, рассеяние, метод моментов, характеристический ток, характеристическое поле.

## I. ВВЕДЕНИЕ

Теория характеристических мод (ТХМ) разработана Гарбачем [1], а затем усовершенствована Харрингтоном и Маутцем в 70-х годах [2]. Изначально она применялась к некоторым антеннам и после этого не получила широкого распространения. Однако за последние годы наблюдается бурный рост числа публикаций, связанных с ее применением при анализе и проектировании антенн для современных приложений [3]. Многие исследования по ТХМ посвящены оценке резонансной частоты структуры, определению расположения антенны на устройствах или ее оптимизации и др. [3]. Особенность ТХМ заключается в ее способности пояснить физические явления, возникающие в структурах при излучении (в случае антенн) и рассеянии (в случае рассеивателей) электромагнитных полей. Кроме того, другим преимуществом применения ТХМ при расчете поверхностного тока провода является отсутствие необходимости инвертировать матрицу импеданса, как при использовании метода моментов (МоМ). В настоящее время активно ведутся исследования по созданию новых разреженных антенных и рассеивающих структур [4], что требует создания новых подходов и алгоритмов для их корректного анализа. ТХМ показала свою способность анализировать такие структуры. В этой связи разработана программа на ее основе для расчета характеристик проводных рассеивателей. Первоначальное тестирование подобных программ целесообразно на простых структурах типа прямого провода.

## II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для анализа поверхностного тока проводов согласно Гарбачу можно использовать только первые несколько мод. Согласно критериям устранения ненужных мод и после разложения реальной части матрицы импеданса необходимо вычислить значения порога, равного  $10^{-3}$  по [2] или  $10^{-6}$  максимального полученного собственного значения по [5]. При этом сохраняются собственные значения, превышающие порог, а недостигающие его остальные значения приравниваются к нулю.

Целью данной статьи является верификация результатов анализа провода с помощью программы, разработанной на основе МоМ с ТХМ, а также демонстрация влияния упомянутых критериев на рассчитанные распределения тока и поля рассеяния.

Результаты программы сравнивались с полученными в [6] и вычисленными с помощью МоМ со ступенчатыми базисными функциями. Рассмотрены зависимости нормированных характеристических токов от номера сегмента вдоль рассеивателя на разных частотах. Также сравнены частотные зависимости собственных значений, модальных значений и характеристических углов. Демонстрирована возможность использования первых нескольких мод для расчета распределения тока и поля рассеяния. Это достигнуто сравнением полученных зависимостей модуля и фазы тока от номера сегмента вдоль рассеивателя на основе первых трех мод вместе и отдельно с рассчитанными с помощью МоМ, а также рассчитанных на их основе напряженностей поля рассеяния.

### III. ТЕОРИЯ

Согласно ТХМ по [2] в случае использования МоМ с ступенчатой базисной функцией для анализа провода количество мод равно количеству его сегментов ( $N$ ). Тогда поверхностный ток ( $I$ ) является линейной комбинацией характеристических токов как

$$I = \sum_{n=1}^N a_n I_n, \quad (1)$$

где  $a_n$  – линейный коэффициент, который необходимо найти для каждой моды;  $n=1, \dots, N$ , а  $I_n$  – характеристический ток  $n$ -й моды. Так,  $I$  создает поле рассеяния ( $E^s$ ), которое определяется линейной комбинацией характеристических полей ( $E_n$ ) как

$$E^s = \sum_{n=1}^N a_n E_n. \quad (2)$$

Линейный коэффициент  $a_n$  в (1) и (2) определяется как

$$a_n = \frac{\langle I_n, E^i \rangle}{1 + j\lambda_n}, \quad (3)$$

где  $E^i$  – вектор возбуждения;  $\lambda_n$  – собственное значение  $n$ -й моды. Числитель (3) можно назвать модальным коэффициентом возбуждения ( $V_n$ ). Формула (3) показывает влияние  $E^i$  на  $I$  и из нее также можно выделить параметр, определяющий вклад  $I_n$  в  $I$ , называемый модальным значением каждой моды (modal significance –  $MS_n$ ) и определяемый как

$$MS_n = \left| \frac{1}{1 + j\lambda_n} \right|. \quad (4)$$

Из (4) видно, что  $MS_n$  зависит только от  $\lambda_n$  и не зависит от  $E^i$ .  $MS_n$  показывает различное влияние  $n$ -й моды на  $I$ , а также на  $E^s$ . Более того, когда  $\lambda_n$  чрезвычайно мало или велико,  $MS_n$  приближается к нулю, а при резонансе ( $\lambda_n=0$ )  $MS_n$  будет равно единице. Кроме того, чем ближе значение  $MS_n$  к единице, тем больше напряженность поля рассеяния. Во многих случаях использование  $MS_n$  вместо  $\lambda_n$  более удобно для определения частот резонансов в широком диапазоне. Ширина полосы рассеяния моды ( $BW_n$ ) может быть определена по ширине  $MS$ . Согласно [7]  $BW_n$  определяется как диапазон частот  $\Delta f_n$ , в котором мощность рассеяния  $n$ -й моды составляет не менее половины мощности рассеяния при резонансе по отношению к резонансной частоте моды ( $f_r$ ):  $\Delta f_n/f_r$ . Другими словами,  $BW_n$  характеризует диапазон частот, в котором характеристический ток превышает  $1/\sqrt{2}$  его значения на  $f_r$ . Таким образом,  $MS$  можно использовать для определения значимых мод, оказывающих сильное влияние на  $I$  (моды с  $MS > 1/\sqrt{2}$ ).

#### IV. РЕЗУЛЬТАТЫ

Моделировался прямой проводный рассеиватель длиной 0.5 м и радиусом 0.5 мм. Провод возбуждался плоской волной амплитудой 1 В/м, направленной перпендикулярно плоскости, в которой расположен провод. Частотные зависимости  $\lambda$ ,  $MS$ , и характеристических углов ( $\alpha$ ) для первых 4 мод в диапазоне 100–1000 МГц для рассматриваемого рассеивателя, полученные разработанной программой и в [6], приведены на рис. 1. Здесь частотные зависимости  $\lambda$  вычислены при пороговом значении  $10^{-6}$ , чтобы получить большее количество мод для дальнейшего сравнения их результатов (при пороговом значении  $10^{-3}$  на частоте  $f_{r1}$  появляются только 2 моды).

Рис. 2 показывает зависимости нормированных  $I_n$  относительно их максимального значения для первых 4 мод от номера сегмента вдоль рассеивателя на частоте  $f_{r1}=280$  МГц (резонансная частота первой моды), полученные разработанной программой и в [6], а рис. 3 показывает эти зависимости на разных частотах. Нормированные  $E_n$  относительно их максимального значения для первых 4 мод на  $f_{r1}$ , полученные разработанной программой и в [6], показаны на рис. 4. На рис. 5 показана зависимость распределения тока (модуль  $|I|$  и фаза  $\varphi_l$ ) от номера сегмента вдоль рассеивателя на  $f_{r1}$ , полученные разработанной программой с использованием только первых 3 мод и с помощью МоМ с 100 ступенчатыми базисными функциями, а на рис. 6 показано полученное на основе этих токов  $E^s$  от рассеивателя. На рис. 7, 8, 9 сравнены полученные МоМ и по разработанной программе зависимости распределения тока ( $|I|$  и  $\varphi_l$ ) от номера сегмента вдоль рассеивателя на трех первых резонансных частотах с использованием различных комбинаций мод при расчете их значения. Частотные зависимости  $\lambda$ , рассчитанные при пороговых значениях  $10^{-3}$  и  $10^{-6}$  для первых 4 мод в диапазоне 100–1000 МГц, полученные с помощью разработанной программы, приведены на рис. 10.

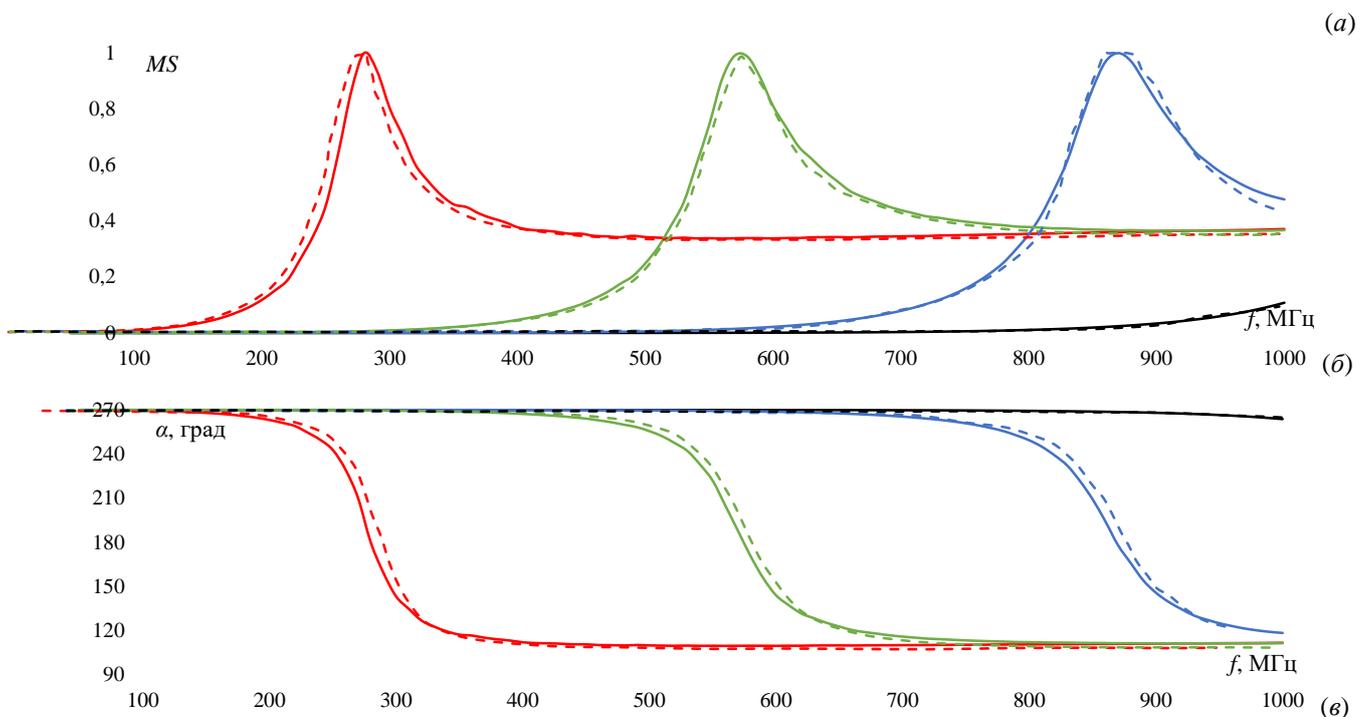


Рис. 1. Частотные зависимости  $\lambda$  (а),  $MS$  (б) и  $\alpha$  (в) для 1-й (красный), 2-й (зеленый), 3-й (синий) и 4-й (черный) мод, полученные в [6] (пунктир) и разработанной программой (сплошной)

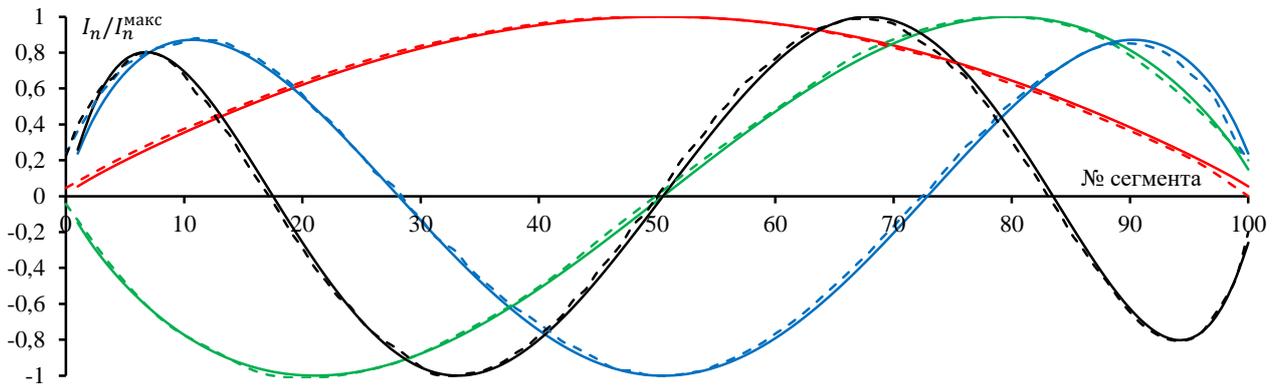


Рис. 2. Зависимости нормированных  $I_n$  от номера сегмента вдоль рассеивателя на частоте  $f_{r1}$  для 1-й (красный), 2-й (зеленый), 3-й (синий) и 4-й (черный) мод, полученные в [6] (пунктир) и разработанной программой (сплошной)

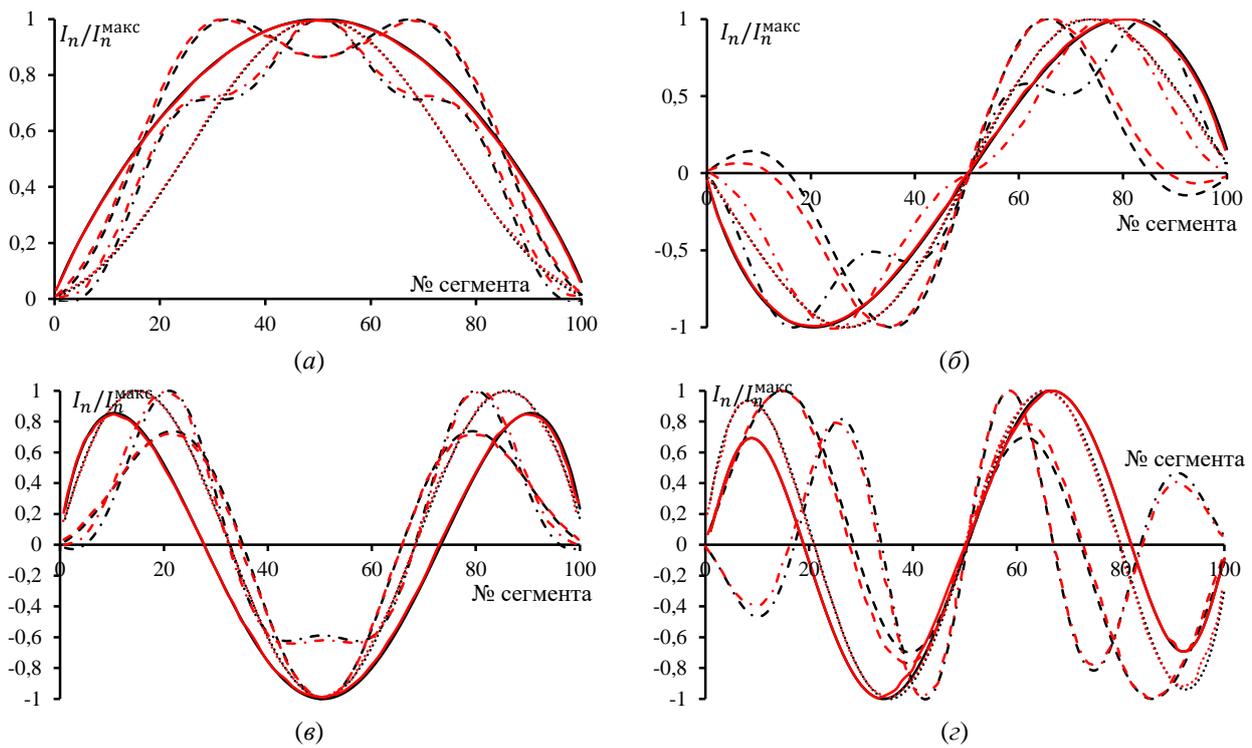


Рис. 3. Зависимости нормированных  $I_n$  от номера сегмента вдоль рассеивателя, полученные в [6] (красный) и разработанной программой (черный) для 1-й (а), 2-й (б), 3-й (в) и 4-й (г) мод на частотах 200 (—), 800 (···), 1400 (— · —) и 2200 (— —) МГц,

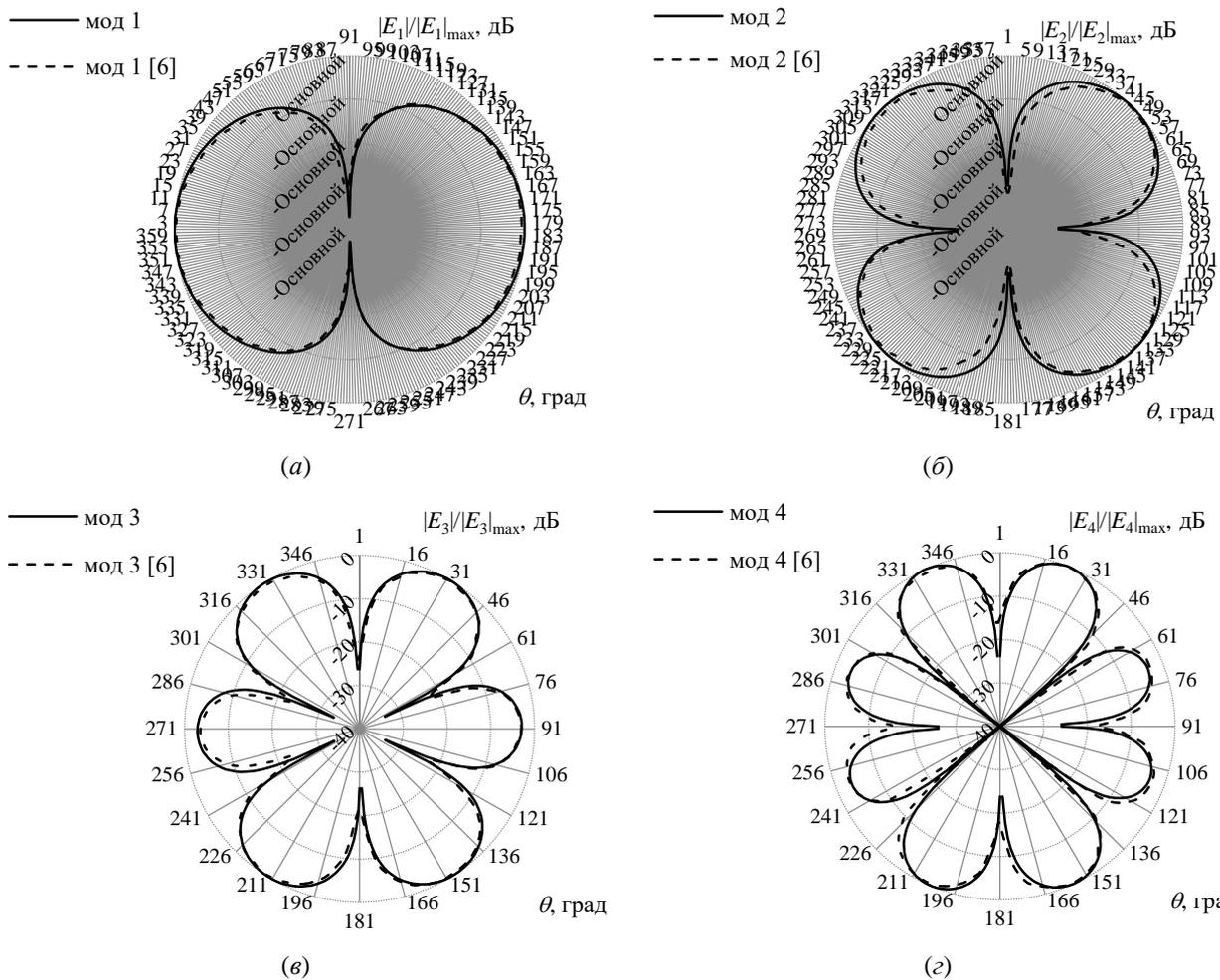


Рис. 4. Нормированные  $E_n$  для 1-й (а), 2-й (б), 3-й(в) и 4-й(г) мод на частоте  $f_{r1}$ , полученные разработанной программой и в [6]

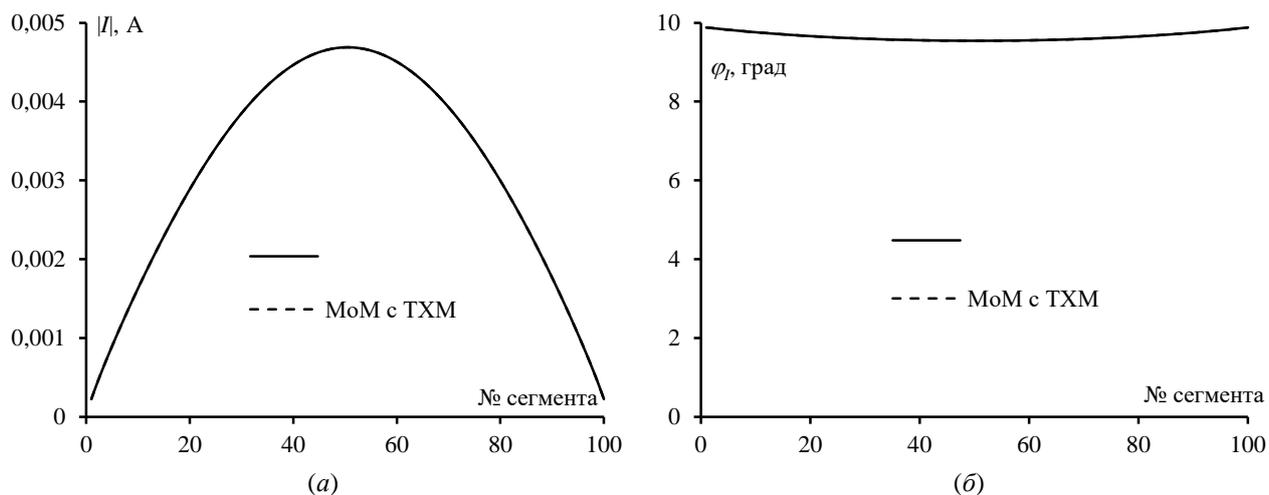


Рис. 5. Зависимости  $|I|$  (а) и  $\varphi_l$  (б) от номера сегмента вдоль рассеивателя на частоте  $f_{r1}$ , полученные разработанной программой с использованием только первых 3 мод и с помощью МоМ

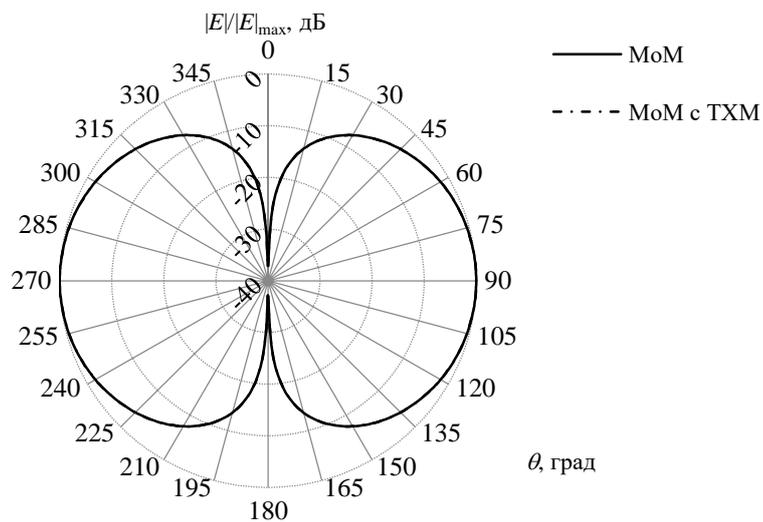


Рис. 6.  $E^s$  от проводного рассеивателя на частоте  $f_{r1}$ , полученные разработанной программой с использованием только первых 3 мод и с помощью MoM

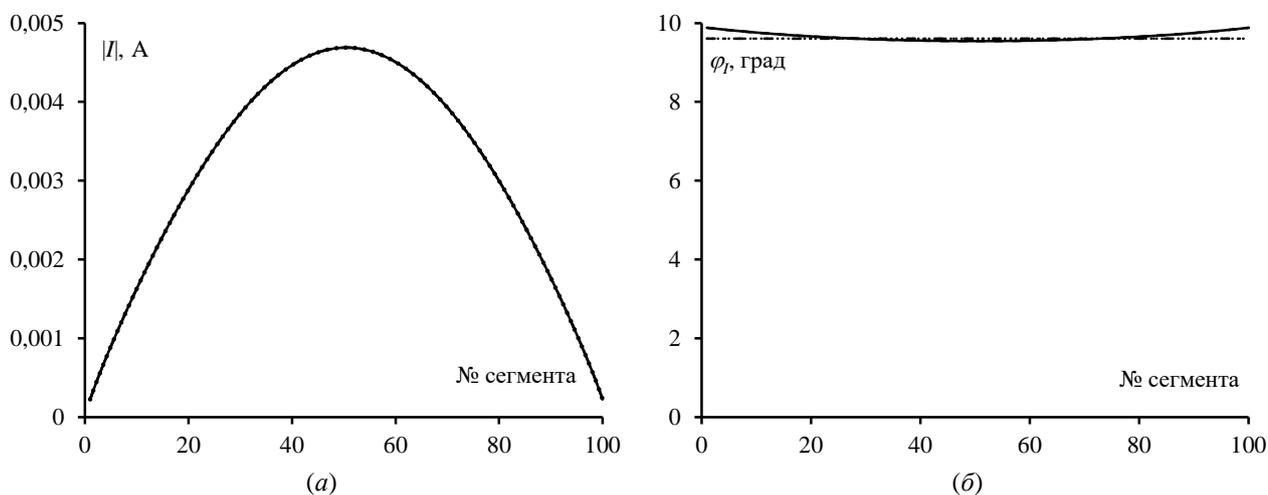


Рис. 7. Зависимости  $|I|$  (а) и  $\varphi_r$  (б) рассеивателя от номера сегмента вдоль него на частоте  $f_{r1}$ , полученные с использованием 1-й (···), 1-й и 2-й (---), 1-й, 2-й и 3-й мод (--) и с помощью MoM (—)

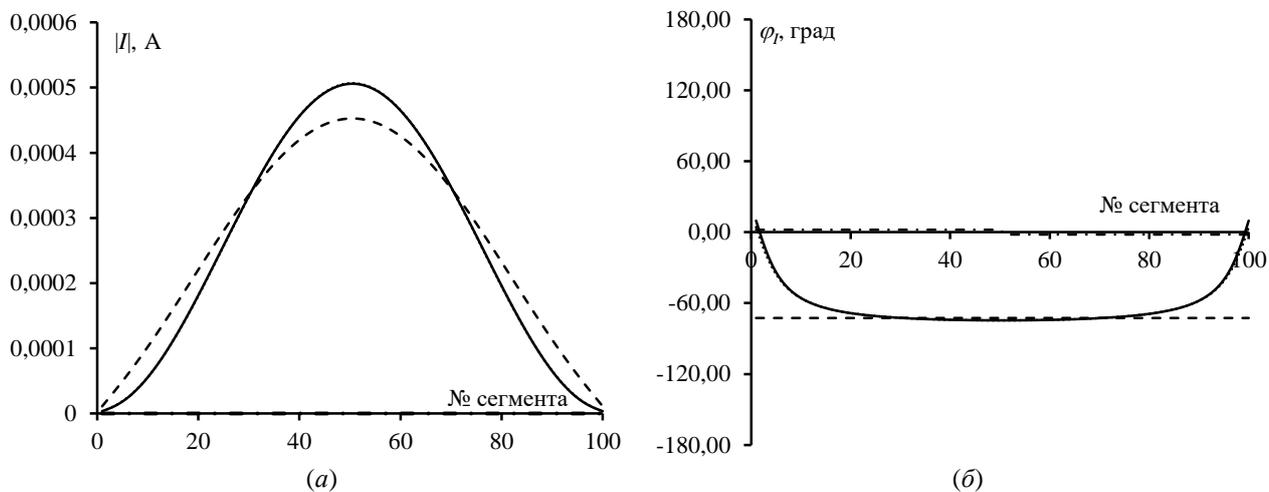


Рис. 8. Зависимости  $|I|$  (а) и  $\varphi_r$  (б) рассеивателя от номера сегмента вдоль него на частоте  $f_{r2}=580$  МГц, полученные с использованием 2-й (---), 1-й и 2-й (--), 1-й, 2-й и 3-й мод (···) и с помощью MoM (—)

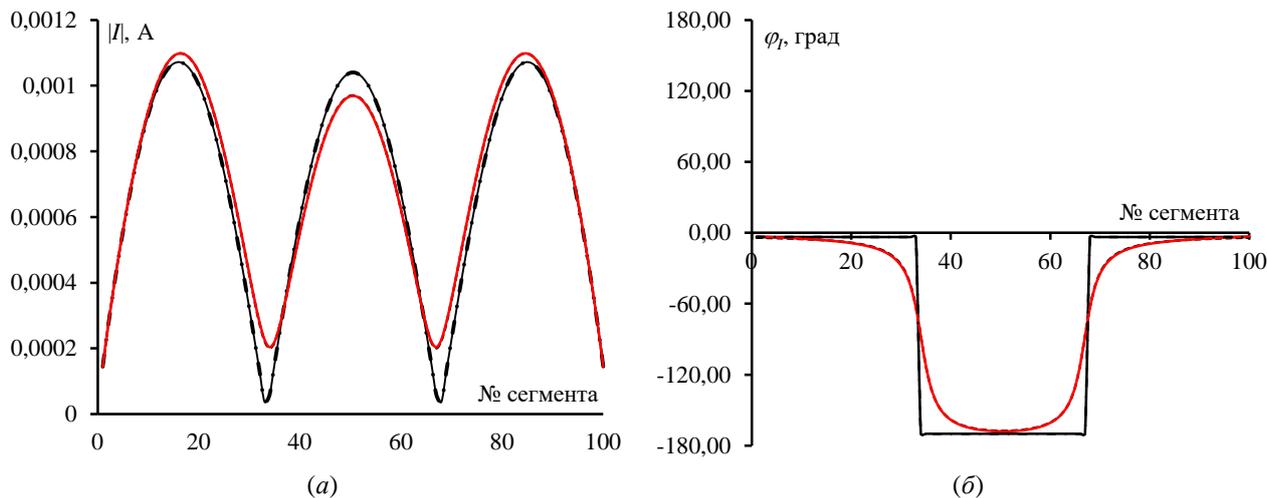


Рис. 9. Зависимости  $|I|$  (а) и  $\varphi_i$  (б) рассеивателя от номера сегмента вдоль его на частоте  $f_{r3}=875$  МГц, полученные с использованием 3-й (—), 2-й и 3-й мод (---), 1-й, 2-й и 3-й (-.-) и с помощью МоМ (—)

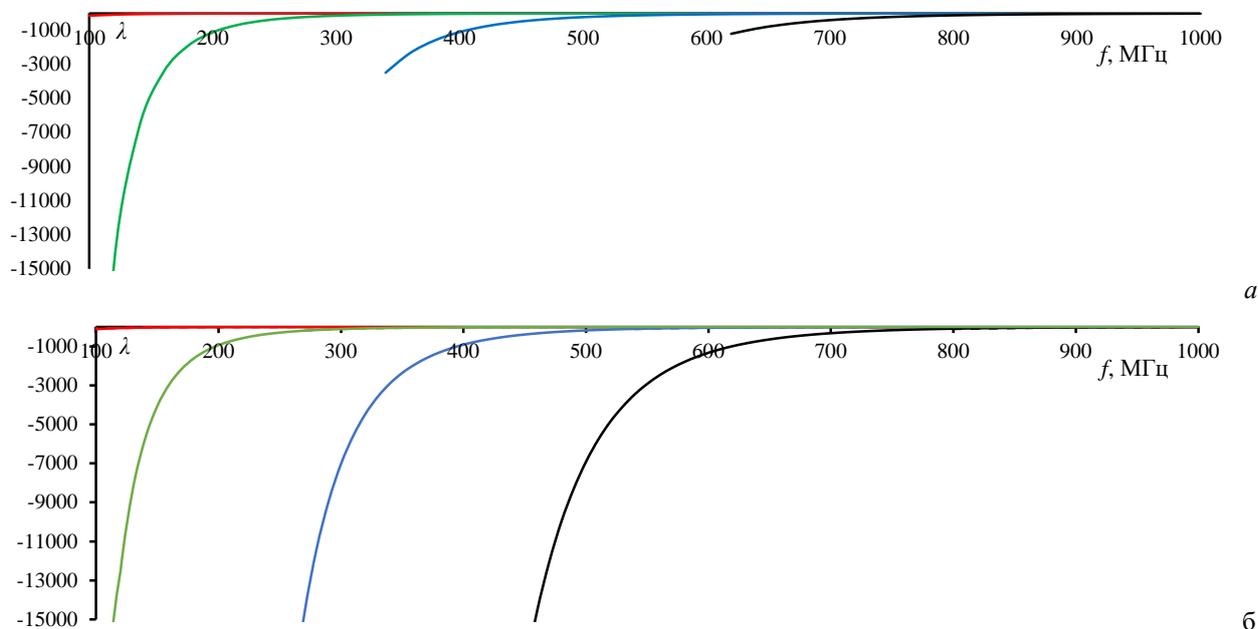


Рис. 10. Частотные зависимости  $\lambda$  для 1-й (красный), 2-й (зеленый) и 3-й (синий) мод, полученные разработанной программой при пороговых значениях  $10^{-3}$  (а) и  $10^{-6}$  (б)

## V. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Из рис. 1 видно, что результаты расчета  $\lambda$ ,  $MS$  и  $\alpha$  в исследуемом диапазоне частот совпадают с полученными в [6]. По данным из рис. 1б определены полосы частот  $\Delta f$  для каждой моды:  $\Delta f_1=48$  МГц,  $\Delta f_2=60$  МГц и  $\Delta f_3=84$  МГц, где видны частотные резонансы каждой моды:  $f_{r1}=280$  МГц,  $f_{r2}=580$  МГц и  $f_{r3}=875$  МГц (при  $MS=1$ ). На  $f_{r1}=280$  МГц собственные значения первых трех мод составили:  $\lambda_1=-0.163$ ,  $\lambda_2=-193.8$ ,  $\lambda_3=-13719$  (рис. 1а), а их модальные значения:  $MS_1=0.985$ ,  $MS_2=0.0052$ ,  $MS_3=0.000072$  (рис. 1б). Стоит отметить, что с помощью рис. 1в можно также определить полосы частот  $\Delta f$  для каждой моды, вычислив значения  $\alpha$ , равные  $225^\circ$  и  $135^\circ$ , при которых значения  $\lambda=1$ , а  $MS=1/\sqrt{2}$ .

Как видно из рис. 2, 3, для различных рассмотренных частот результаты расчета  $I_n$  с помощью ТХМ на основе МоМ со 100 ступенчатыми базисными функциями (по разработанной программе) хорошо согласуются с опубликованными в [6]. Из рис. 3 видно, что форма  $I_n$  меняется с частотой и предсказать, какой она будет, сложно, поскольку это зависит от структуры и ее геометрических параметров. Однако, анализируя форму  $I_n$  для каждой моды, когда падающая волна перпендикулярна поверхности провода (и, по крайней мере, в рассматриваемом диапазоне частот), можно определить вклад  $I_n$  в  $I$  следующим образом. Если форма  $I_n$  симметрична относительно нуля (например,  $I_2$  и  $I_4$ ), то  $V_n=0$  и рассматриваемый  $I_n$  не имеет вклада в  $I$ . Например, на частоте  $f_{r1}$  получены следующие значения коэффициента модального возбуждения:  $V_1=-0.0398$ ,  $V_2=7.9635*10^{-15}$ ,  $V_3=-0.0349$  и  $V_4=5.2413*10^{-15}$ . Из этого можно сделать вывод, что только 1-я и 3-я моды имеют большой вклад в  $I$ . На рис. 3б наблюдается небольшое расхождение сравниваемых результатов, полученных для 2-й моды только на частоте 1400 МГц, причины которого необходимо исследовать в дальнейшем, но оно может объясняться использованием различных методов разложения матрицы импеданса структуры, поскольку авторы [6] не указали в своей работе, какие методы и базисные функции они использовали.

Полученные первые 4 характеристических поля (рис. 4) при использовании МоМ с ТХМ хорошо соотносятся с полученными в [6]. Их малое различие также может быть обусловлено использованием других базисных функций в [6]. Кроме того, использование только первых трех мод при анализе исследуемого провода является достаточным. Это подтверждается совпадением результатов расчета зависимости  $|I|$  и  $\varphi_I$  от номера сегмента вдоль рассеивателя на  $f_{r1}$  (рис. 5) с полученными МоМ. Также видно, что  $I$  приобрел форму  $I_1$ , так как 1-я мода имеет большой вклад в  $I$  на  $f_{r1}$ . Результаты на рис. 5 и рис. 10 демонстрируют влияние вышеуказанных критериев на результаты анализа. Это также свидетельствует об их достоверности, поскольку при пороговом значении  $10^{-6}$  появляется больше мод в рассматриваемом диапазоне чем, при  $10^{-3}$ , и, несмотря на это, только первых трех при  $10^{-6}$  достаточно для получения корректных результатов по сравнению с МоМ. Эти выводы также можно сделать, проанализировав данные на рис. 6. Рассчитанное рассеянное поле при использовании МоМ с ТХМ хорошо совпадает с полученным при применении МоМ с 100 ступенчатыми базисными функциями (рис. 6). Из рис. 4 и 6 видно, что форма  $E^s$  идентична форме  $E_1$ .

Результаты сравнения  $I$  при использовании различных комбинаций первых трех мод на разных частотах  $f_{r1}$  (рис. 7),  $f_{r2}$  (рис. 8)  $f_{r3}$  (рис. 9) с полученными с помощью МоМ показывают корректность рассмотренных критериев. Из рис. 7 можно заметить, что результаты всех комбинаций моды (1, 1-2, 1-2-3) совпадают между собой и с полученными МоМ. Это объясняется большим вкладом 1-й моды. Из рис. 8 можно заметить, что из рассмотренных комбинаций (2, 1-2, 1-2-3) совпадают с МоМ только результаты (1-2-3), а результаты 2-й моды стремятся к нулю (из-за симметричности формы  $I_2$ ). Результаты комбинации (1-2) расходятся от результатов МоМ, что объясняется отсутствием вклада 3-й моды. Из рис. 9 можно заметить, что из рассмотренных комбинаций (3, 1-3, 2-3) совпадают с МоМ только результаты (1-3), а результаты (3, 2-3) расходятся от результатов МоМ, что объясняется отсутствием вклада 1-й моды. Это также показывает, что в рассматриваемом диапазоне частот и при такой волне возбуждения 1-я и 3-я моды имеют большой вклад в  $I$  в отличие от 2-й моды, которая не вносит вклад в  $I$ , поскольку  $V_2=0$ . Сравнивая  $|I|$  на рис. 7а, 8а и 9а, можно заметить, что наибольший ток наблюдается на частоте 280 МГц (4.7 мА), за которой следуют частоты 875 (1.1 мА) и 580 МГц (0.5 мА). В рассматриваемом диапазоне частот и при такой волне возбуждения данной структуры максимальный ток будет только при первом резонансе ( $f_{r1}$ ).

## VI. ВЫВОДЫ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты анализа прямого провода с помощью ТХМ с МоМ верифицировались путем их сравнения с полученными в [6] и МоМ со ступенчатыми базисными функциями. Рассматривались собственные значения, модальные значения, характеристические углы, характеристические токи, распределение тока, характеристическое и рассеянное поля. Также продемонстрировано влияние критерия устранения ненужных мод

на рассчитанные распределения тока и поля рассеяния. Предполагается использовать и развивать данную программу для анализа более сложных рассеивающих структур и особенно разреженных.

#### Источник финансирования. Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России по проекту FEWM-2024-0005.

Научный руководитель: профессор, д.т.н. Газизов Тальгат Рашитович, Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Garbacz R. J. A Generalized Expansion for Radiated and Scattered Fields // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 1971. Vol. 19, No. 3, Pp. 348–358.
2. Harrington, R., Mautz, J. Theory of characteristic modes for conducting bodies // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 1971. Vol. 19, No. 5, Pp. 622–628.
3. Elias B. B. Q., Soh P. J., Al-Hadi A. A., Akkaraekthalin P., and Vandenbosch G. A. A review of antenna analysis using characteristic modes. *IEEE Access*. 2021. Vol. 9, Pp. 98833-98862.
4. Alhaj Hasan A., Nguyen M. T., Kuksenko S. P., Gazizov T. R. A Wire-grid and sparse MoM antennas: Past evolution, present implementation, and future possibilities // *Symmetry*. 2023. Vol. 15, No. 2. Pp. 378.
5. Stroschein D. A. Application of characteristic mode analysis to variable antenna placement on devices operating in the near-resonant range. University of New Hampshire. 2002. 156 p.
6. Fabrés M. C. Systematic design of antennas using the theory of characteristic modes. Universitat Politècnica de València. 2007. 208 p.
7. Брезгулевский Д. С. Синтез широкополосного излучателя с использованием характеристических мод. 2021. 173 с.